

【解答】

(i)	ア	
	2	
(ii)	イ	ウ
	-3	$\frac{3}{2}$
(iii)	エ	オ
	100	9
(iv)	カ	
	$-\sqrt{2}$	
(v)	キ	ク ケ
	-4	61
(vi)	コ	
	9	
(vii)	サ	シ
	7	-5
(viii)	ス	セ
	18	21

- 【解説】
- (i)
- 与えられた条件より
- $$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(1+1,1+2,1-1)=(2,3,0)$$
- $$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=\frac{1}{4}(1+3,1+6,1-3)=\left(1,\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right)$$
- である。したがって、直線BC上に点Qがあることから、 $\overrightarrow{OQ}$ は実数 k をもちいて、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=(1-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}\\&=(1-k)(1,2,-1)+k(2,3,0)\\&=(1+k,2+k,-1+k)\end{aligned}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$
- と表せる。一方で、直線OP上に点Qがあることから、 $\overrightarrow{OQ}$ は実数 s をもちいて、
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=s\overrightarrow{OP}\\&=\left(s,\frac{7}{4}s,-\frac{1}{2}s\right)\end{aligned}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$
- とも表せる。①、②の成分を比較して、
- $$\begin{cases}s=1+k\\ \frac{7}{4}s=2+k\\ -\frac{1}{2}s=-1+k\end{cases}\qquad\qquad\qquad\begin{array}{l}\cdots\cdots\textcircled{3}\\\cdots\cdots\textcircled{4}\\\cdots\cdots\textcircled{5}\end{array}$$
- となる。③、④より s を消去すると
- $$\begin{aligned}\frac{7}{4}(1+k)&=2+k\\ \Leftrightarrow k&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$
- と求まる。このとき③より $s=\frac{4}{3}$ である。したがって、 $(k,s)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ であり、これは⑤を満たす。よって、 $\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ であるから、点Qは線分BCを1:2に内分する。つまり、
- $$\frac{CQ}{BQ}=\frac{2}{1}=2$$
- と求まる。

- (ii)
- [1] $x\geq 0$ のとき
- 与えられた不等式の絶対値をはずして
- $$\begin{aligned}4x^2+5x-12&\leq 3x\\ \Leftrightarrow 2x^2+x-6&\leq 0\\ \Leftrightarrow (2x-3)(x+2)&\leq 0\\ \Leftrightarrow -2\leq x\leq \frac{3}{2}\end{aligned}$$
- となる。したがって、 $x\geq 0$ との共通範囲を考えると、 $0\leq x\leq \frac{3}{2}$ と求まる。
- [2] $x< 0$ のとき
- 与えられた不等式の絶対値をはずして
- $$\begin{aligned}4x^2+5x-12&\leq -3x\\ \Leftrightarrow x^2+2x-3&\leq 0\\ \Leftrightarrow (x+3)(x-1)&\leq 0\\ \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1\end{aligned}$$
- となる。したがって、 $x< 0$ との共通範囲を考えると、 $-3\leq x< 0$ と求まる。
- 以上、[1],[2]より、与えられた不等式を満たす x の範囲は $-3\leq x\leq \frac{3}{2}$ であるから、
- $$a=-3,b=\frac{3}{2}$$
- と求まる。

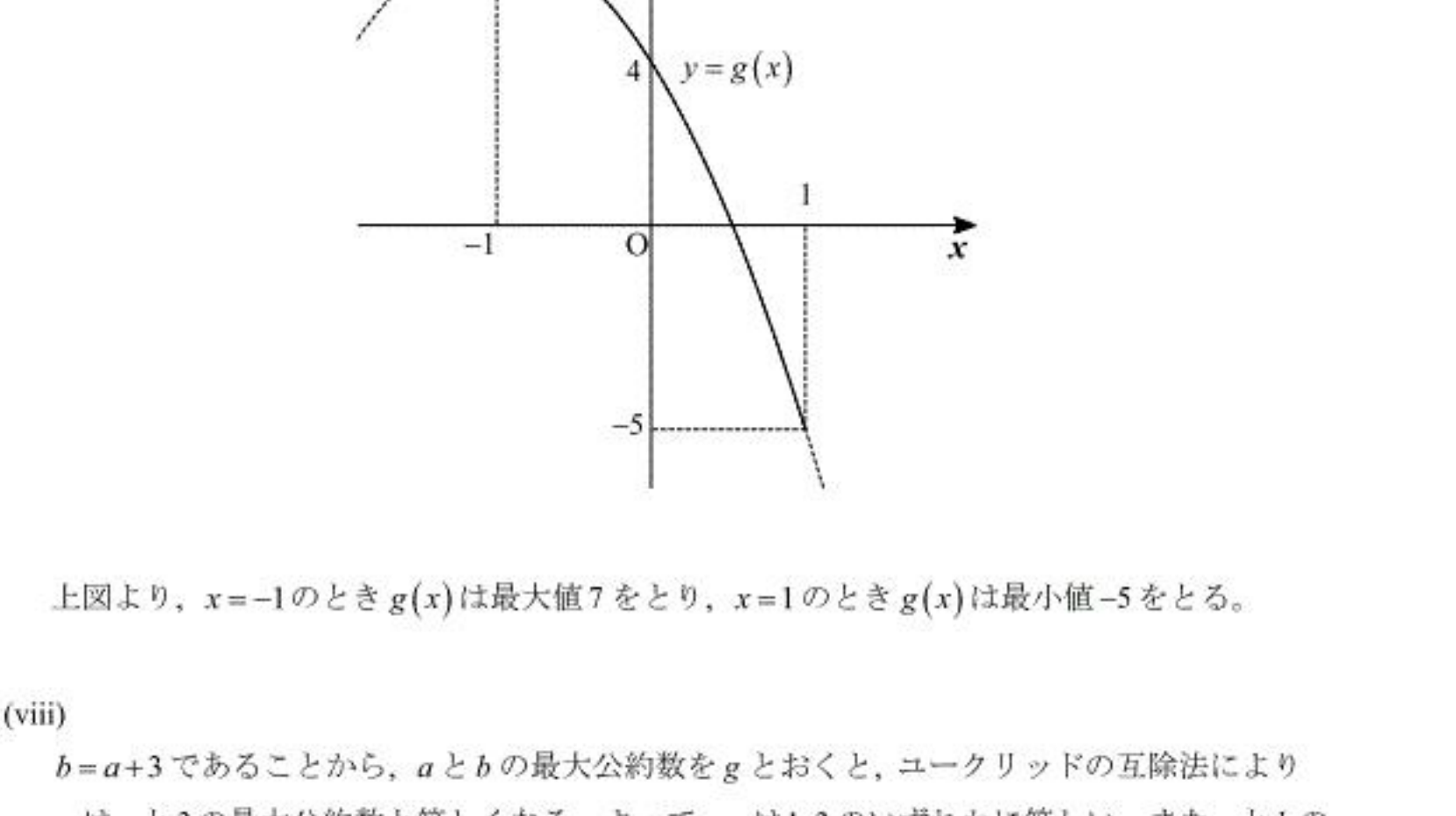
- (iii)
- 与式を変形して、
- $$\begin{aligned}&\sum_{n=10}^{99}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=10}^{99}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\\&=\frac{1}{10}-\frac{1}{100}\\&=\frac{9}{100}\end{aligned}$$
- と求まる。

- (iv)
- $$\begin{aligned}x&=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\\&=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$
- と変形できるから、ド・モアブルの定理より、
- $$\begin{aligned}x^3+\frac{1}{x^3}&=x^3+x^{-3}\\&=\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+\left\{\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}\\&=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\\&=-\sqrt{2}\end{aligned}$$
- と求まる。

- (v)
- 与えられた条件より
- $$\begin{aligned}f(0)&=1\\ \Leftrightarrow c&=1\end{aligned}$$
- と求まる。また、 $f'(x)=2ax+b$ であるから、
- $$\begin{aligned}f'(1)&=-2\\ \Leftrightarrow 2a+b&=-2\\ \Leftrightarrow b&=-2(a+1)\end{aligned}$$
- である。したがって、 $f(x)=ax^2-2(a+1)x+1$ であるから、
- $$\begin{aligned}\int_0^1f(x)dx&=\int_0^1\{ax^2-2(a+1)x+1\}dx\\&=\left[\frac{a}{3}x^3-(a+1)x^2+x\right]_0^1\\&=\frac{a}{3}-(a+1)+1\\&=-\frac{2}{3}a\end{aligned}$$
- となる。よって、積分の条件より
- $$\begin{aligned}\int_0^1f(x)dx&=\frac{8}{3}\\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3}a&=\frac{8}{3}\\ \Leftrightarrow a&=-4\end{aligned}$$
- である。さらに、
- $$\begin{aligned}b&=-2\cdot(-3)\\&=6\end{aligned}$$
- と求まる。以上の議論より、 $a=-4,b=6,c=1$ である。

- (vi)
- 対数に関する変形を行って、
- $$\begin{aligned}n&\leq 6\log_23<n+1\\ \Leftrightarrow n&\leq \log_23^6<n+1\\ \Leftrightarrow 2^n&\leq 3^6<2^{n+1}\\ \Leftrightarrow 2^n&\leq 729<2^{n+1}\end{aligned}$$
- となる。ここで、 $2^9=512,2^{10}=1024$ であり、 2^n は n に関して単調増加するから、与えられた不等式を満たす n は $n=9$ のみである。

- (vii)
- $f(\theta)$ を $\sin\theta$ のみで表すと、
- $$\begin{aligned}f(\theta)&=3\cos^2\theta-6\sin\theta+1\\&=3(1-\sin^2\theta)-6\sin\theta+1\\&=-3\sin^2\theta-6\sin\theta+4\end{aligned}$$
- となる。ここで $\sin\theta=x$ とおくと、 $0\leq\theta<2\pi$ より $-1\leq x\leq 1$ であり、
- $$f(\theta)=-3x^2-6x+4$$
- と表せる。したがって $g(x)=-3x^2-6x+4(-1\leq x\leq 1)$ とおいたときの $g(x)$ の最大値と最小値を求めれば良い。ここで、
- $$\begin{aligned}g(x)&=-3x^2-6x+4\\&=-3(x+1)^2+7\end{aligned}$$
- より、 $y=g(x)(-1\leq x\leq 1)$ のグラフは下図の実線部ようになる。

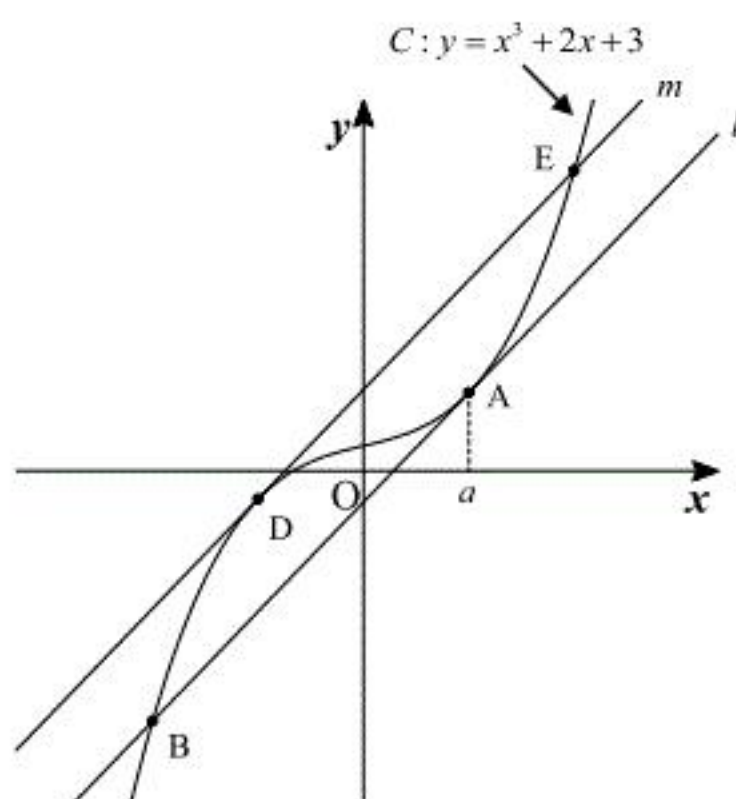


- 上図より、 $x=-1$ のとき $g(x)$ は最大値7をとり、 $x=1$ のとき $g(x)$ は最小値-5をとる。

- (viii)
- $b=a+3$ であることから、 a と b の最大公約数を g とおくと、ユークリッドの互除法により g は a と3の最大公約数と等しくなる。よって、 g は1,3のいずれかに等しい。また a と b の最小公倍数は126であるから、
- $$ab=126g$$
- と表せる。以下、 g の値に応じて場合分けする。
- [1] $g=1$ のとき
- $$\begin{aligned}ab&=126\\ \Leftrightarrow a(a+3)&=126\\ \Leftrightarrow a^2+3a-126&=0\\ \Leftrightarrow a&=\frac{-3\pm3\sqrt{57}}{2}\end{aligned}$$

- となるが、これは a は自然数という条件を満たさないため不適である。

- [2] $g=3$ のとき
- $$\begin{aligned}ab&=126\cdot 3\\ \Leftrightarrow a(a+3)&=378\\ \Leftrightarrow a^2+3a-378&=0\\ \Leftrightarrow (a+21)(a-18)&=0\\ \Leftrightarrow a&=18,-21\end{aligned}$$
- となる。このうち a が自然数という条件を満たすのは $a=18$ のみであり、このとき $b=21$ である。
- 以上、[1],[2]より、 $a=18,b=21$ と求まる。



(i)

曲線 C について $y' = 3x^2 + 2$ である。直線 l は $x = a$ における曲線 C の接線であるから、接線の式の公式をもちいて、

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 + 2)(x - a) + a^3 + 2a + 3 \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 + 2)x - 2a^3 + 3 \end{aligned}$$

と表せる。よって、直線 l の y 切片は $-2a^3 + 3$ と求まる。

(答) $-2a^3 + 3$

(ii)

直線 l と曲線 C の方程式を連立して

$$\begin{aligned} (3a^2 + 2)x - 2a^3 + 3 &= x^3 + 2x + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2a, a \end{aligned}$$

となる。 $x = a$ は点 A の x 座標を表すから、点 B の x 座標は $-2a$ である。

(答) $-2a$

(iii)

直線 m の傾きは直線 l の傾きに等しいから、直線 m と曲線 C の接点の x 座標、すなわち点 D の x 座標に関して、

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2 &= 3a^2 + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow x &= a, -a \end{aligned}$$

となるが、ここで $x = a$ は点 A の x 座標だから、点 D の x 座標は $x = -a$ である。

(答) $-a$

(iv)

直線 m は点 $D(-a, -a^3 - 2a + 3)$ における曲線 C の接線であるから、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 + 2)(x + a) - a^3 - 2a + 3 \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 + 2)x + 2a^3 + 3 \end{aligned}$$

と求まる。直線 m と曲線 C の方程式を連立して

$$\begin{aligned} (3a^2 + 2)x + 2a^3 + 3 &= x^3 + 2x + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x - 2a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + a)^2(x - 2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2a, -a \end{aligned}$$

となる。 $x = -a$ は点 D の x 座標を表すから、点 E の x 座標は $2a$ である。

(答) $2a$

(v)

$B(-2a, -8a^3 - 4a + 3)$, $E(2a, 8a^3 + 4a + 3)$ であるから、 $a > 0$ より直線 BE の傾きは、

$$\frac{(8a^3 + 4a + 3) - (-8a^3 - 4a + 3)}{2a - (-2a)} = 4a^2 + 2$$

と求まる。したがって、直線 BE の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (4a^2 + 2)(x - 2a) + (8a^3 + 4a + 3) \\ \Leftrightarrow y &= (4a^2 + 2)x + 3 \\ \Leftrightarrow 4xa^2 + (2x - y + 3) &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式が a についての恒等式となるとき

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (0, 3) \end{aligned}$$

となる。よって、直線 BE は a の値にかかわらず点 $(0, 3)$ を通る。

(答) $(0, 3)$

III

(i)

点 A と直線 $l: 2x - y = 0$ に関して、点と直線の距離の公式より、

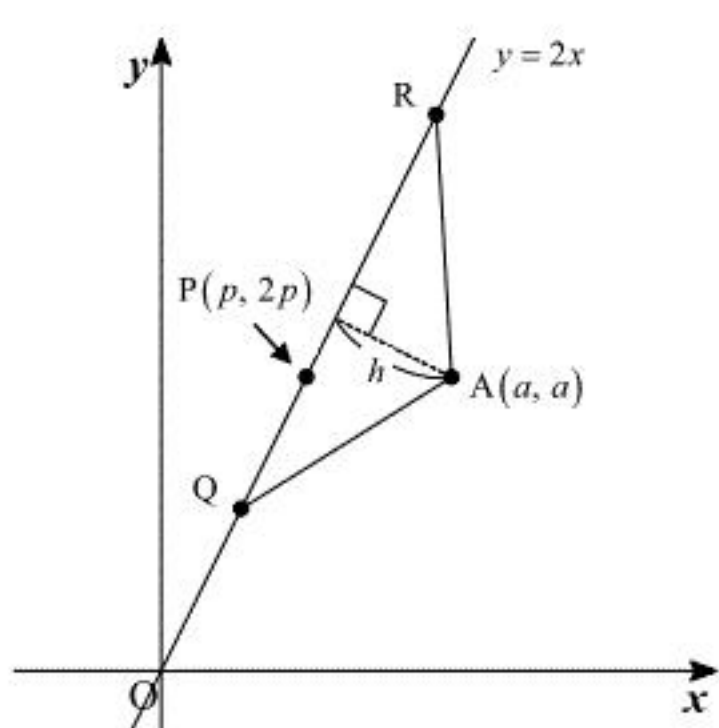
$$h = \frac{|2a - a|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad (\because a > 0)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad h = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

(ii)

三角形 AQR および点 P を図示すると、下図のようになる。



上図より、線分 QR を底辺とみると $S = \frac{1}{2} \cdot \text{QR} \cdot h$ が成り立つ。したがって、QR は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \text{QR} \cdot h \\ \Leftrightarrow \text{QR} &= \frac{2S}{h} \\ \Leftrightarrow \text{QR} &= \frac{2\sqrt{5}S}{a} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \text{QR} = \frac{2\sqrt{5}S}{a}$$

(iii)

線分 AP の長さは、

$$\begin{aligned} \text{AP} &= \sqrt{(p-a)^2 + (2p-a)^2} \\ &= \sqrt{5p^2 - 6ap + 2a^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\text{AP} = \text{PQ} = \frac{1}{2} \text{PR}$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{QR} &= \text{QP} + \text{PR} \\ &= \text{AP} + 2\text{AP} \\ &= 3\text{AP} \\ &= 3\sqrt{5p^2 - 6ap + 2a^2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \text{QR} = 3\sqrt{5p^2 - 6ap + 2a^2}$$

(iv)

(ii), (iii)の結果より、QR について以下の等式が導ける。

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5p^2 - 6ap + 2a^2} &= \frac{2\sqrt{5}S}{a} \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{5p^2 - 6ap + 2a^2} &= \frac{2\sqrt{5}}{a} \quad (\because S=1) \end{aligned}$$

両辺ともに正であるから、両辺を 2 乗しても同値であり

$$\begin{aligned} 9(5p^2 - 6ap + 2a^2) &= \frac{20}{a^2} \\ \Leftrightarrow 45a^2p^2 - 54a^3p + (18a^4 - 20) &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって求める a の値の範囲は、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 p が存在するような a の値の範囲に等しい。つまり、 $\textcircled{1}$ を p についての 2 次方程式とみなして判別式を D としたときに $D \geq 0$ とすれば良い。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (27a^3)^2 - 45a^2(18a^4 - 20) \\ &= -81a^6 + 900a^2 \\ &= -9a^2(9a^4 - 100) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -9a^2(9a^4 - 100) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 9a^4 - 100 &\leq 0 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow a^4 &\leq \frac{100}{9} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{10}{3}} &\leq a \leq \sqrt{\frac{10}{3}} \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ とあわせて、 $0 < a \leq \sqrt{\frac{10}{3}}$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad 0 < a \leq \sqrt{\frac{10}{3}}$$

(v)

(ii)より $\text{QR} = \frac{2\sqrt{5}}{a}$ ($\because S=1$) である。また、(iv)より $0 < a \leq \sqrt{\frac{10}{3}}$ であるから、この範囲で QR は

単調減少する。よって、QR が最小値をとるのは $a = \sqrt{\frac{10}{3}}$ のときであり、その値は、

$$\text{QR} = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{10}} = \sqrt{6}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \text{QR} = \sqrt{6} \left(a = \sqrt{\frac{10}{3}} \right)$$