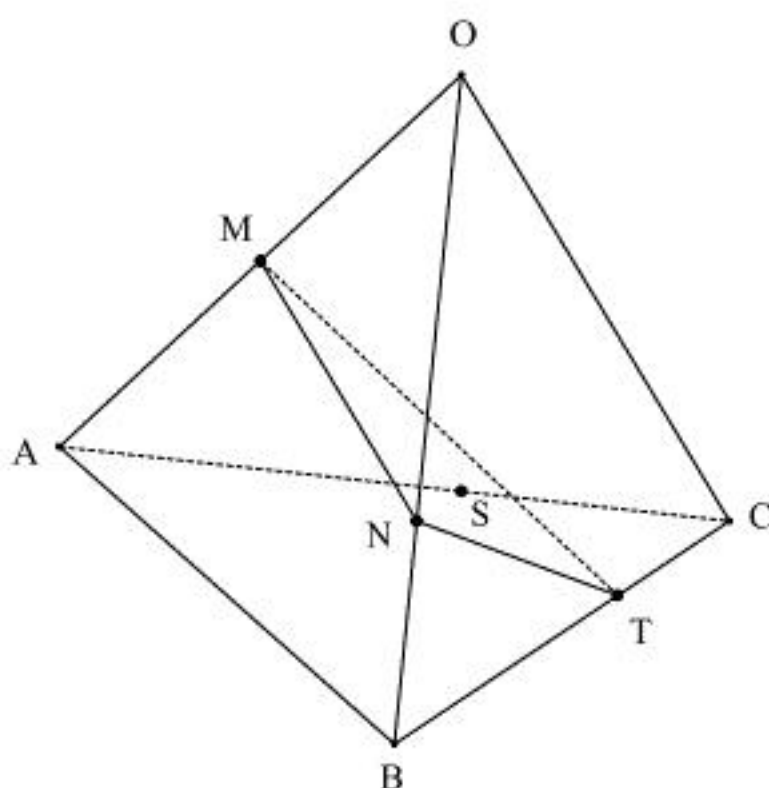


I

(i)



題意より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 1^2 = 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}, \vec{a} \cdot \vec{a} = 1$$

(ii)

BT:TC = t:1 であるから

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{t+1} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OT} = \frac{1}{t+1} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c}$$

(iii)

OM:MA = 1:1, ON:NB = 2:1 であるから $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3} \vec{b}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

と求まる。一方、 $\overrightarrow{NT}$ は(ii)の結果を利用して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{ON} \\ &= \left(\frac{1}{t+1} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c} \right) - \frac{2}{3} \vec{b} \\ &= \frac{1-2t}{3(t+1)} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}, \overrightarrow{NT} = \frac{1-2t}{3(t+1)} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c}$$

(iv)

$\angle MNT = 90^\circ$ であるから、 $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NT} = 0$ となる。よって、(i), (iii)の結果を利用すると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NT} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} \right) \cdot \left\{ \frac{1-2t}{3(t+1)} \vec{b} + \frac{t}{t+1} \vec{c} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-2t}{6(t+1)} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{t}{2(t+1)} \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{4t-2}{9(t+1)} |\vec{b}|^2 - \frac{2t}{3(t+1)} \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-2t}{12(t+1)} + \frac{t}{4(t+1)} + \frac{4t-2}{9(t+1)} - \frac{t}{3(t+1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(1-2t) + 9t + 4(4t-2) - 12t &= 0 \quad (\because t+1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow 7t &= 5 \\ \therefore t &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

となる。したがって $t = \frac{5}{7}$ である。これは t が正の数であるという条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{5}{7}$$

(v)

AS:CS = s:1 であるから

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{s+1} \vec{a} + \frac{s}{s+1} \vec{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2} \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{2}{3} \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \frac{3}{2} \overrightarrow{ON} \end{aligned}$$

である。また、(iv)の結果より $\angle MNT = 90^\circ$ のとき $t = \frac{5}{7}$ であり、このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \frac{7}{12} \vec{b} + \frac{5}{12} \vec{c} \\ \Leftrightarrow \vec{c} &= -\frac{7}{5} \vec{b} + \frac{12}{5} \overrightarrow{OT} \\ \Leftrightarrow \vec{c} &= -\frac{21}{10} \overrightarrow{ON} + \frac{12}{5} \overrightarrow{OT} \end{aligned}$$

と表せる。これを①に代入して

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{1}{s+1} \cdot 2\overrightarrow{OM} + \frac{s}{s+1} \left(-\frac{21}{10} \overrightarrow{ON} + \frac{12}{5} \overrightarrow{OT} \right) \\ &= \frac{2}{s+1} \overrightarrow{OM} - \frac{21s}{10(s+1)} \overrightarrow{ON} + \frac{12s}{5(s+1)} \overrightarrow{OT} \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OT}$ は同一平面上にないから、点Sが平面H上の点であるとき、 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OT}$ の係数の和が1になる。したがって、

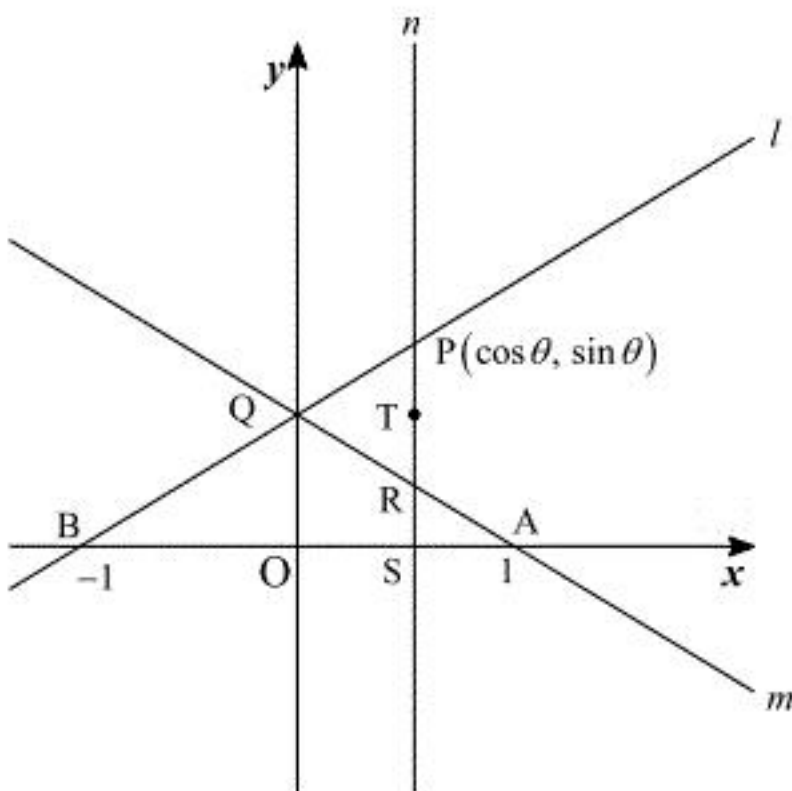
$$\begin{aligned} \frac{2}{s+1} - \frac{21s}{10(s+1)} + \frac{12s}{5(s+1)} &= 1 \\ \Leftrightarrow 20 - 21s + 24s &= 10(s+1) \quad (\because s+1 \neq 0) \\ \Leftrightarrow 7s &= 10 \\ \therefore s &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

となる。よって $s = \frac{10}{7}$ であり、これは s が1でない正の数であるという条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{10}{7}$$

II

(i)



$B(-1, 0)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ であるから、直線 l の方程式は

$$y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - (-1)} \{x - (-1)\}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (x + 1)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (x + 1)$$

(ii)

$A(1, 0)$, $Q\left(0, \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}\right)$ であるから、直線 m の方程式は

$$y = \frac{-\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}}{1 - 0} (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (x - 1)$$

と求まる。点 R は直線 m 上の点であり、その x 座標は $\cos \theta$ であるから、 y 座標は

$$-\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (\cos \theta - 1) = \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}$$

となる。よって、点 T は線分 PR の中点であるから、点 T の y 座標は

$$\frac{\sin \theta + \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta}}{2} = \frac{\sin \theta (1 + \cos \theta) + \sin \theta (1 - \cos \theta)}{2(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

(iii)

T の x 座標は $\cos \theta$ であるから、題意より $t = \cos \theta$ となる。そして(ii)の結果より

$$\sqrt{F(t)} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$F(t) = \left(\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right)^2$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - t}{1 + t}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad F(t) = \frac{1 - t}{1 + t}$$

(iv)

$Q\left(0, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}\right)$, $T\left(\cos \theta, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1}\right)$ より点 Q , T の y 座標は等しい。また、直線 n の方程式は

$$x = \cos \theta$$

であるから、点 S の座標は $S(\cos \theta, 0)$ である。したがって、三角形 QST は $\angle QTS = \frac{\pi}{2}$

の直角三角形であるから、その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot QT \cdot TS$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{F(t)}$$

$$= \frac{t}{2} \sqrt{\frac{1 - t}{1 + t}}$$

となる。また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$0 < \cos \theta < 1 \Leftrightarrow 0 < t < 1$$

である。したがって $S > 0$ であるから、 S^2 が最大るとき S も最大となる。 S^2 は

$$S^2 = \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1 - t}{1 + t}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2 - t^3}{1 + t}$$

と表される。ここで、 $f(t) = \frac{t^2 - t^3}{1 + t}$ とすると、 $f(t)$ が最大となるとき S^2 も最大となる。 $f(t)$

を微分すると

$$f'(t) = \frac{(2t - 3t^2)(1 + t) - (t^2 - t^3)}{(1 + t)^2}$$

$$= \frac{-2t(t^2 + t - 1)}{(1 + t)^2}$$

となる。 $f'(t) = 0$ をみたく t は、 $0 < t < 1$ より $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。 $0 < t < 1$ の範囲で $f(t)$ の増

減表を書くとき以下のようになる。

t	0	...	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $f(t)$ は $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ で最大値を取る。よって、三角形 QST の面積を最大にする t

は $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

(v)

(iii)の結果より、曲線 C の方程式は

$$y = \sqrt{F(x)} \quad (0 < x < 1)$$

と表せる。したがって求める立体の体積 V は

$$V = \int_0^1 \pi \{F(x)\}^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1 - x}{1 + x} dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{1 + x} - 1 \right) dx$$

$$= \pi \left[2 \log(1 + x) - x \right]_0^1$$

$$= (2 \log 2 - 1) \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = (2 \log 2 - 1) \pi$$