

1.

【解答】

(i)	ア	
	2	
(ii)	イ	ウ
	3	-1, 8
(iii)	エ	
	-1+i	
(iv)	オ	カ
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
(v)	キ	
	$\frac{\pi}{2}$	

【解説】

(i)

法を7とした合同式を用いて考えると、

$$\begin{aligned}n &= 2019 \\ &= 7 \times 288 + 3 \\ &\equiv 3 \pmod{7}\end{aligned}$$

であるため、これを用いて与式を変形すると、

$$\begin{aligned}4n^3 + 3n^2 + 2n + 1 &\equiv 4 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \\ &\equiv 142 \\ &\equiv 2 \pmod{7}\end{aligned}$$

となる。したがって、与式を7で割った余りは2となる。

(ii)

$0 \in A \cap B$ より、 $0 \in A$ 、すなわち $a^2 - 5a + 6 = 0$ または $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0$ が必要である。

[1] $a^2 - 5a + 6 = 0$ が成立するとき

このとき、

$$\begin{aligned}a^2 - 5a + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(a - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2, 3\end{aligned}$$

である。 $a = 2$ のとき、

$$\begin{aligned}A &= \{1, 0\} \\ B &= \{1, 0, 2\}\end{aligned}$$

であり、これは $-1 \in A \cup B$ を満たさない。また、 $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned}A &= \{1, 0, 8\} \\ B &= \{1, -1, 0\}\end{aligned}$$

であり、これはすべての条件を満たす。

[2] $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0$ が成立するとき

このとき、

$$\begin{aligned}a^3 - 3a^2 + 3a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1\end{aligned}$$

である。 $a = 1$ のとき、 $B = \{1, 3, 4\}$ となり、これは $0 \in A \cap B$ を満たさない。

以上[1], [2]より、すべての条件を満たす a の値は3である。このとき、

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{0, 1\} \\ A \cup B &= \{-1, 0, 1, 8\}\end{aligned}$$

であるため、 $X = \{-1, 8\}$ となる。

(iii)

$z = x + yi$ と置くと、

$$\begin{aligned}|z + 1| &= 1 \\ \Leftrightarrow (x + 1 + yi)(x + 1 - yi) &= 1 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}|z - 1 - 2i| &= \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow (x - 1 + yi - 2i)(x - 1 - yi + 2i) &= 5 \\ \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 5\end{aligned}$$

である。また、 $z \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$ であるため、 x, y に関する条件は、

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 & \cdots \textcircled{2} \\ (x, y) \neq (0, 0) & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。 x, y 平面上で、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ は円の方程式であり、2つの円の中心間距離は $2\sqrt{2}$ 、半径の

和は $1 + \sqrt{5}$ 、半径の差の絶対値は $\sqrt{5} - 1$ となる。ここで、

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &< \sqrt{9} = 1 + \sqrt{4} < 1 + \sqrt{5} \\ \therefore 2\sqrt{2} &< 1 + \sqrt{5} \\ \sqrt{5} - 1 &< \sqrt{5} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \therefore \sqrt{5} - 1 &< 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

より、この2つの円は共有点を2つ持つ。 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の2つの共有点を通る直線は、

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + y^2 - (x^2 - 2x + y^2 - 4y) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= -x\end{aligned}$$

と表せるため、これを $\textcircled{1}$ に代入し、

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + (-x)^2 &= 0 \\ x(x + 1) &= 0 \\ x &= -1, 0\end{aligned}$$

となる。これを $y = -x$ に代入することで $(x, y) = (-1, 1), (0, 0)$ が得られる。このうち、 $\textcircled{3}$ を

満たすのは $(x, y) = (-1, 1)$ であるため、 $z = -1 + i$ となる。

(iv)

3枚のカードの並べ方は同様に確からしく、また並べ方の総数は ${}_3P_3 = 60$ (通り)である。 a が

3の倍数であることは、 a の各桁の和が3の倍数となることと同値である。和が3の倍数と

なるような3枚のカードの組み合わせは、 $(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$ の4通りであり、

それぞれ $3! = 6$ (通り)の並べ方が存在するので、 a が3の倍数となる確率は $\frac{4 \times 6}{60} = \frac{2}{5}$ となる。

また、 a が5の倍数であることは、 a の下一桁が5となることと同値である。したがって、

1, 2回目の操作で5以外の数字の記された4枚のカードから2枚を引き、3回目の操作で5の

書かれたカードを引けばよいため、 a が5の倍数となる確率は $\frac{{}_4P_2}{60} = \frac{1}{5}$ となる。

(v)

$f(x) = \tan(\pi x)$ とすると、 $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$ であるため、微分係数の定義より、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1}{4} \cdot \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{x - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{4} f'\left(\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

である。また、

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\pi x)} \cdot \pi$$

であるため、

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2\pi$$

となり、これを代入することで、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

が得られる。

II.

〔解答〕

(i)	$b_1 = 1, b_2 = -4, b_3 = 16$
-----	-------------------------------

〔解説〕

(i)

与えられた漸化式に $n = 1, 2, 3, 4$ を代入することで、

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^0 + (-1)^0 2a_1 = 3 \\ a_3 &= 2^1 + (-1)^1 2a_2 = -4 \\ a_4 &= 2^2 + (-1)^2 2a_3 = -4 \\ a_5 &= 2^3 + (-1)^3 2a_4 = 16 \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{2-1} = 1 \\ b_2 &= a_{4-1} = -4 \\ b_3 &= a_{6-1} = 16 \end{aligned}$$

が得られる。

(ii)

与えられた漸化式より、

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2^{2n+1} + (-1)^{2n+1} 2a_{2n} = 2^{2n+1} - 2a_{2n} \\ a_{2n} &= 2^{2n-2} + (-1)^{2n-2} 2a_{2n-1} = 2^{2n-2} + 2a_{2n-1} \end{aligned}$$

が得られる。2式から a_{2n} を消去すると、

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 2^{2n+1} - 2(2^{2n-2} + 2a_{2n-1}) = -4a_{2n-1} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= -4b_n \end{aligned}$$

となる。これより、 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$ 、公比 -4 の等比数列となるため、

$$b_n = (-4)^{n-1}$$

である。

(答) $b_n = (-4)^{n-1}$

(iii)

与えられた漸化式より、

$$a_{2n} = 2^{2n-2} + 2a_{2n-1}$$

である。(ii)より $a_{2n-1} = b_n = (-4)^{n-1}$ であるため、

$$\begin{aligned} c_n &= 2^{2n-2} + 2 \cdot (-4)^{n-1} \\ &= 4^{n-1} \{1 + (-1)^{n-1} \cdot 2\} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $c_n = 4^{n-1} \{1 + (-1)^{n-1} \cdot 2\}$

(iv)

(ii), (iii)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} d_n &= a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n} \\ &= b_{2n-1} + c_{2n-1} + b_{2n} + c_{2n} \\ &= (-4)^{2n-2} + 4^{2n-2} \{1 + (-1)^{2n-2} \cdot 2\} + (-4)^{2n-1} + 4^{2n-1} \{1 + (-1)^{2n-1} \cdot 2\} \\ &= 4^{2n-2} (1 + 3 - 4 - 4) \\ &= -4 \cdot 16^{n-1} \end{aligned}$$

となる。したがって $\{d_n\}$ は初項 $d_1 = -4$ 、公比 16 の等比数列である。

(答) 初項 $d_1 = -4$ 、公比 16

(v)

変形すると、

$$\begin{aligned} S_{4n} &= \sum_{i=1}^{4n} a_i \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{4i-3} + a_{4i-2} + a_{4i-1} + a_{4i}) \\ &= \sum_{i=1}^n d_i \\ &= \sum_{i=1}^n (-4 \cdot 16^{i-1}) \\ &= -4 \cdot \frac{1-16^n}{1-16} \\ &= \frac{4}{15} - \frac{4 \cdot 2^{4n}}{15} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{4n}}{2^{4n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{15 \cdot 2^{4n}} - \frac{4}{15} \right) \\ &= -\frac{4}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{4}{15}$

III.

【解答】

(i)	$l: y = \frac{2-t}{t^3}x + \frac{2t-3}{t^2}$
-----	--

【解説】

(i)

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ を x で微分することで、

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

が得られる。したがって l の方程式は、

$$\begin{aligned} y - f(t) &= f'(t)(x - t) \\ \Leftrightarrow y - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} &= \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}\right)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2-t}{t^3}x + \frac{2t-3}{t^2} \end{aligned}$$

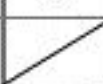
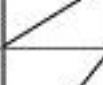
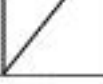
となる。

(ii)

$f'(x), f''(x)$ をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2-x}{x^3} \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4} \end{aligned}$$

であるため、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	2	...	3	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$			$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{9}$	

したがって、変曲点の座標は $\left(3, \frac{2}{9}\right)$ となる。

(答) $\left(3, \frac{2}{9}\right)$

(iii)

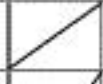
$x=1$ と l の交点が Q であるため、 $x=1$ を l に代入することで、

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{2-t}{t^3} + \frac{2t-3}{t^2} \\ &= \frac{2}{t} - \frac{4}{t^2} + \frac{2}{t^3} \end{aligned}$$

が得られる。従って、

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{2}{t^2} + \frac{8}{t^3} - \frac{6}{t^4} \\ &= -\frac{2(t-1)(t-3)}{t^4} \end{aligned}$$

となるため、 $t > 0$ における $g(t)$ の増減表は下表のようになる。

t	0	...	1	...	3	...
$g'(t)$		-	0	+	0	-
$g(t)$			0		$\frac{8}{27}$	

よって、 $t=3$ のとき、極大値 $\frac{8}{27}$ を、 $t=1$ のとき、極小値 0 をとる。

(答) 極大値 $\frac{8}{27}$ ，極小値 0

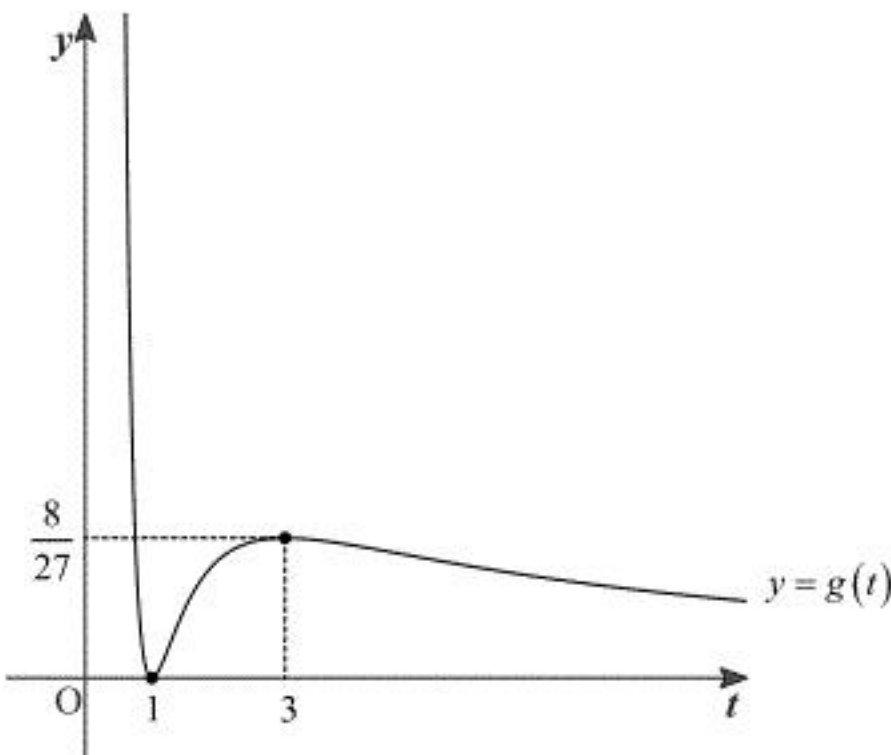
(iv)

点 $A(1, a)$ を通る C の接線がちょうど2つあることは、 $g(t) = a$ の実数解がちょうど2つ存在することと同値である。ここで、

$$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2(t-1)^2}{t^3} = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

より、 $y = g(t)$ のグラフは下図のようになる。



$y = g(x)$ と $y = a$ が共有点をちょうど2つ持つのは、グラフより $a = \frac{8}{27}$ と分かる。

(答) $a = \frac{8}{27}$

(v)

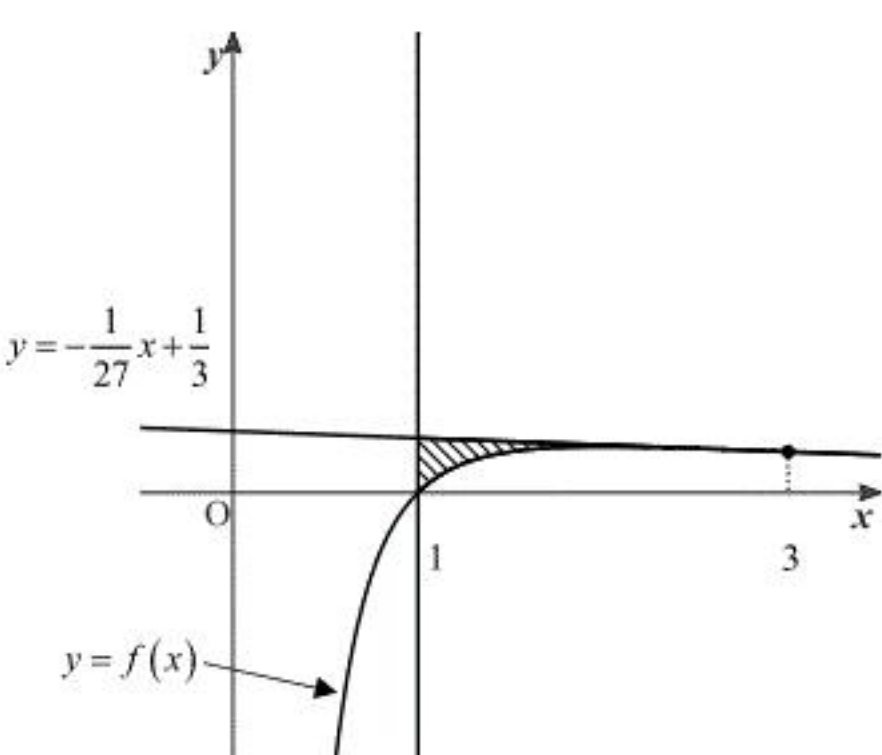
$g(t) = \frac{8}{27}$ の解は2つあるが、グラフより1つは $t=3$ であり、もう1つの解は1より小さいことが分かる。

l の傾きは $f'(t) = \frac{2-t}{t^3}$ であるため、 $t=3$ のとき負、 $0 < t < 1$ のとき正である。

したがって、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{2-3}{3^3}x + \frac{2 \cdot 3 - 3}{3^2} \\ &= -\frac{1}{27}x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であることが分かる。ここで、(ii)の過程を用いると、 $y = f(x)$ および直線 m のグラフは下図のようになり、求める面積 S は下図の斜線部の面積となる。



したがって、

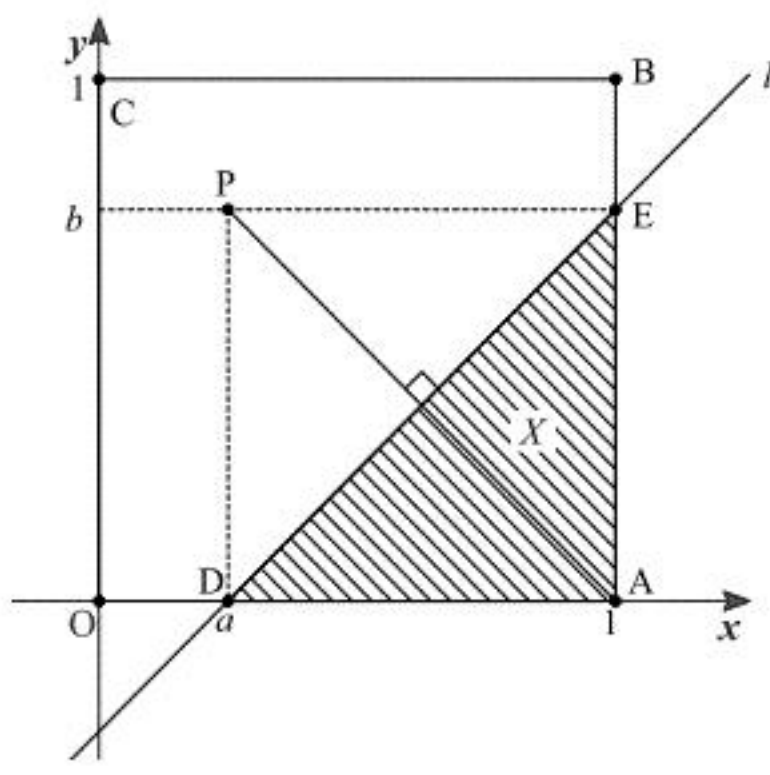
$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{27}x + \frac{1}{3} - f(x)\right) dx \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{1}{27}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{54}x^2 + \frac{1}{3}x - \log x - \frac{1}{x}\right]_1^3 \\ &= \frac{32}{27} - \log 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{32}{27} - \log 3$

IV.

(i)



l と正方形 $OABC$ の 2 つの交点のうち、 x 座標が小さいほうを D 、大きいほうを E とする。 X が三角形になるためには、 D が線分 OA 上、 E が線分 AB 上に存在することが必要である。さらに $DA \perp EA$ より X が直角二等辺三角形になるためには、 $DA = EA$ となること、すなわち l の傾きが 1 であることが必要である。 l の傾きが 1 であるとき、 $PA \perp l$ より直線 PA の傾きは -1 となり、したがって P は $y = -x + 1$ 上に存在する。このときの a, b の満たすべき条件は、 $a + b = 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ である。逆にこれらを満たすとき、 $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ より P は正方形 $OABC$ の内部に存在し、 X は直角二等辺三角形になる。よって求める条件は、 $a + b = 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ である。

(答) $a + b = 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$

(ii)

PA の中点を M とする。このとき M の座標は $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$ となる。また、 $a \neq 1$ より PA の傾きは $\frac{-b}{1-a}$ となる。 $PA \perp l$ かつ $b \neq 0$ より l の傾きは $\frac{1-a}{b}$ である。したがって、 l の方程式は実数 c を用いて、

$$y = \frac{1-a}{b}x + c$$

と表せる。 l は M を通るから、

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} &= \frac{1-a}{b} \cdot \frac{a+1}{2} + c \\ \Leftrightarrow c &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 l の方程式は $y = \frac{1-a}{b}x + \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b}$ となり、 m, n はそれぞれ

$$\begin{aligned} m &= \frac{1-a}{b} \\ n &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b} \end{aligned}$$

となる。

(答) $m = \frac{1-a}{b}, n = \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b}$

(iii)

l と $y = 0$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1-a}{b}x + \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{2(a-1)} \quad (\because a \neq 1) \end{aligned}$$

である。また、 M は正方形 $OABC$ の内部にあり、 l の傾きは $\frac{1-a}{b}$ 、すなわち正であるから、 l が $y = 0$ と $1 < x$ で交わることはない。したがって、 l が辺 OA と交わる必要十分条件は、 $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ かつ、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{a^2 + b^2 - 1}{2(a-1)} \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\leq 1 \quad (\because 0 < 1-a) \end{aligned}$$

である。

(答) $a^2 + b^2 \leq 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$

(iv)

l と $x = 1$ の交点の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-a}{b} + \frac{a^2 + b^2 - 1}{2b} \\ &= \frac{a^2 - 2a + b^2 + 1}{2b} \end{aligned}$$

である。また、 M は正方形 $OABC$ の内部にあり、 l の傾きは $\frac{1-a}{b}$ 、すなわち正であるから、 l が $x = 1$ と $y < 0$ で交わることはない。したがって、 l が辺 AB と交わる必要十分条件は、 $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ かつ、

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 2a + b^2 + 1}{2b} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 &\leq 2b \quad (\because b > 0) \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$

(v)

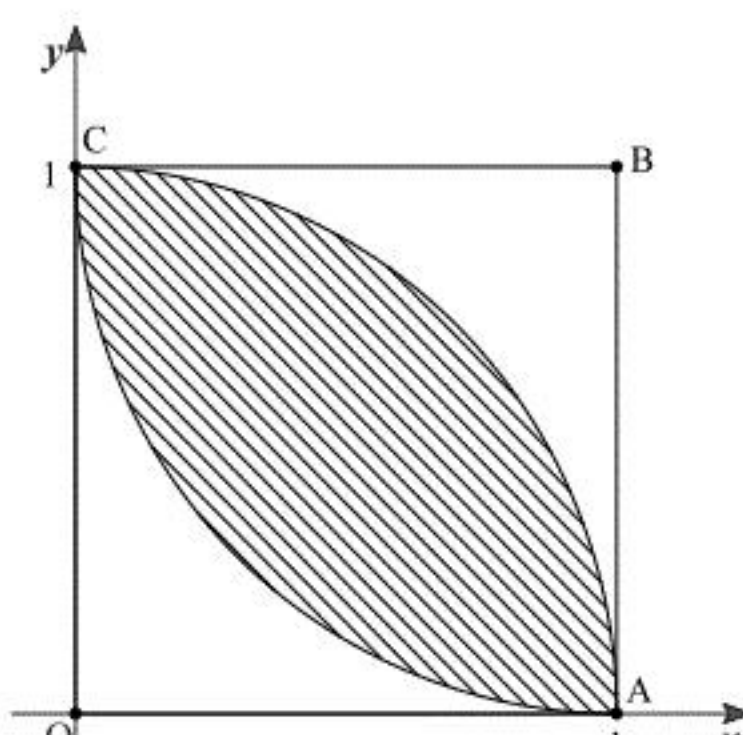
X が三角形となることは、 l が辺 OA と交わり、かつ l が辺 AB と交わることと同値である。

したがって、(iii), (iv) より a, b の必要条件は、 $a^2 + b^2 \leq 1$ かつ $(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ である。

(答) $a^2 + b^2 \leq 1$ かつ $(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 1$ かつ $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$

(vi)

(v) より、 X が三角形となるように P が動くとき、 P の動く領域に A と C を加えた領域は下図の斜線部のようになる。



したがって、求める面積は、扇形 OAC と扇形 BAC の面積の和から正方形 $OABC$ を引いた値であるから、

$$\frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 2 - 1^2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{2} - 1$