

2019年度

Y 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 次の空欄ア～セに当てはまる数または式を記入せよ。

(i) 座標空間に原点O, 点A(1, 1, 1), 点B(1, 2, -1)がある。さらに

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ を満たす点Cがある。線分ABを3:1に内分する点をPとし、直

線OPと直線BCの交点をQとすると、 $\frac{CQ}{BQ} = \boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) 不等式 $4x^2 + 5x - 12 \leq 3|x|$ を満たす x の範囲が $a \leq x \leq b$ のとき、

$a = \boxed{\text{イ}}$, $b = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) $\sum_{n=10}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$ を既約分数 $\frac{b}{a}$ で表すと、 $a = \boxed{\text{エ}}$, $b = \boxed{\text{オ}}$ である。

(iv) $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ のとき、 $x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{\text{カ}}$ である。ただし、 i は虚数単位とする。

(v) 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(0) = 1$, $f'(1) = -2$, $\int_0^1 f(x) dx = \frac{8}{3}$ を満

たすとき、 $a = \boxed{\text{キ}}$, $b = \boxed{\text{ク}}$, $c = \boxed{\text{ケ}}$ である。

(vi) $n \leq 6 \log_2 3 < n+1$ を満たす自然数 n は $n = \boxed{\text{コ}}$ である。

(vii) 関数 $f(\theta) = 3 \cos^2 \theta - 6 \sin \theta + 1$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ であり、

最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(viii) 2つの自然数 a, b ($a < b$) の差が3, 最小公倍数が126のとき、 $a = \boxed{\text{ス}}$,
 $b = \boxed{\text{セ}}$ である。

Ⅱ. $a > 0$ とする。座標平面上に曲線 $C: y = x^3 + 2x + 3$ がある。 C 上の点 $A(a, a^3 + 2a + 3)$ における C の接線を l とする。 l と C の共有点で、 A とは異なる点を B とする。 C の接線で、 l と平行で l とは異なるものがただ 1 つある。この直線を m とし、 m と C の接点を D とする。 m と C の共有点で D とは異なる点を E とする。このとき、次の (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) l と y 軸との交点の y 座標を a を用いて表せ。

(ii) B の x 座標を a を用いて表せ。

(iii) D の x 座標を a を用いて表せ。

(iv) E の x 座標を a を用いて表せ。

(v) a の値にかかわらず直線 BE が通る点が 1 つある。この点の座標を求めよ。

Ⅲ. $a > 0$ とする。座標平面上に、点 $A(a, a)$ と直線 $l: y = 2x$ 上の 3 点 P, Q, R があり、次の 2 つの条件を満たしている。

- Q の x 座標は P の x 座標より小さく、また、 R の x 座標は P の x 座標より大きい。
- 線分の長さについて、 $AP = PQ = \frac{1}{2}PR$ である。

三角形 AQR の面積を S とする。点 $P(p, 2p)$ が l 上を動くとき、次の (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) A と l の距離を h とする。 h を a を用いて表せ。
- (ii) 線分 QR の長さを S と a を用いて表せ。
- (iii) 線分 QR の長さを a と p を用いて表せ。
- (iv) $S = 1$ となるような a の値の範囲を求めよ。
- (v) $S = 1$ のとき、線分 QR の長さの最小値とそのときの a の値を求めよ。

【以下余白】

