

2019年度

B_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(i) $n = 2019$ とするとき, $4n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ を 7 で割った余りは ア である.

(ii) a を実数とする. 2つの集合

$$A = \{1, a^2 - 5a + 6, a^3 - 3a^2 + 3a - 1\}, B = \{1, a^2 - 6a + 8, a^3 - 6a^2 + 9a\}$$

が, $0 \in A \cap B$ かつ $-1 \in A \cup B$ をみたすとき, $a =$ イ である. また, このとき, 集合 $X = \{x | x \in A \cup B \text{ かつ } x \notin A \cap B\}$ の要素をすべて求めると ウ である.

(iii) i を虚数単位とする. 条件「 $|z + 1| = 1$ かつ $|z - 1 - 2i| = \sqrt{5}$ かつ $z \neq 0$ 」をみたす複素数 z は, $z =$ エ である.

(iv) 下図のように 1 から 5 までの数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある.



この中から 1 枚のカードを引く操作を 3 回繰り返す. ただし, 各操作において, 引いたカードは元に戻さないものとする. 引いた順に 3 枚のカードを左から右に並べて作られる 3 桁の整数を a とする. このとき, a が 3 で割り切れる確率は オ であり, また, 5 で割り切れる確率は カ である.

(v) 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1}$ の値は キ である.

Ⅱ. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. さらに, $\{a_n\}$ の奇数番目の項のみからなる数列を $\{b_n\}$, 偶数番目の項のみからなる数列を $\{c_n\}$ とする. つまり, $b_n = a_{2n-1}$, $c_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする. このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ. (i)の解答欄には答えのみを書き, (ii)~(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) b_1, b_2, b_3 の値をそれぞれ求めよ.

(ii) $\{b_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(iii) $\{c_n\}$ の一般項を n を用いて表せ.

(iv) $d_n = a_{4n-3} + a_{4n-2} + a_{4n-1} + a_{4n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, 数列 $\{d_n\}$ は等比数列になる. 初項と公比をそれぞれ求めよ.

(v) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{4n}}{2^{4n}}$ の値を求めよ.

Ⅲ. 関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (x > 0)$$

座標平面上に、曲線 $C: y = f(x) (x > 0)$ がある. また, $t > 0$ として C 上の点 $P(t, f(t))$ における C の接線を l とする. このとき, 次の問(i)~(v)に答えよ.

(i)の解答欄には答えのみを書き, (ii)~(v)の解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと.

(i) l の方程式を求めよ.

(ii) C の変曲点の座標をすべて求めよ.

(iii) 直線 $x = 1$ と l との交点を Q とし, Q の y 座標を $g(t)$ とおく. t が $t > 0$ の範囲を動くとき, $g(t)$ の極大値と極小値のそれぞれをすべて求めよ.

(iv) a を正の数とする. 点 $A(1, a)$ を通る C の接線がちょうど2つあるとき, a の値を求めよ.

(v) (iv)のとき, A を通る C の2つの接線のうち傾きが負である方を m とおく. 直線 $x = 1$, m , C で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

IV. 座標平面上に $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$ を頂点とする正方形と点 $P(a, b)$ がある. ただし, $0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする. さらに, A , P はある直線に関して対称であり, その直線を l とする. このとき正方形 $OABC$ は, l により 2 つの領域に分割される. これら 2 つの領域のうち A を含む方を X とする. ただし, X は境界線を含む. このとき, 次の問 (i) ~ (vi) に答えよ. 解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと.

- (i) X が直角二等辺三角形となるための a と b についての必要十分条件を求めよ.
- (ii) l の方程式を $y = mx + n$ とするとき, m , n を a , b を用いてそれぞれ表せ.
- (iii) l と辺 OA が交わるための a と b についての必要十分条件を求めよ.
- (iv) l と辺 AB が交わるための a と b についての必要十分条件を求めよ.
- (v) X が三角形となるための a と b についての必要十分条件を求めよ.
- (vi) X が三角形となるように P が動くとき, P の動く領域に A と C を加えた領域の面積 S を求めよ.

【以下余白】

