

1.

【解答】

(i)	ア	
	-3	
(ii)	イ	
	$\frac{1}{9}$	
(iii)	ウ	
	$\frac{10}{21}$	
(iv)	エ	
	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	
(v)	オ	
	$\frac{36}{25}$	
(vi)	カ	
	$\sqrt{5}$	
(vii)	キ	ク
	-5	-6
(viii)	ケ	
	$-1+2^{n-1}$	

【解説】

(i)

$a+b+c=0$ を用いて与式を変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}&=\frac{(a+b+c)-a}{a}+\frac{(a+b+c)-b}{b}+\frac{(a+b+c)-c}{c} \\&=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} \\&=-3\end{aligned}$$

となる。

(ii)

指数法則を用いると、

$$\begin{aligned}27^{-\frac{3}{4}}\times 27^{\frac{1}{12}}&=27^{\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\right)} \\&=27^{-\frac{2}{3}} \\&=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

となる。

(iii)

カードの選び方は同様に確からしい。3枚のカードの取り出し方の総数は ${}_3C_3=84$ (通り)である。このうち3枚のカードの数字の和が奇数になるのは、3枚すべてのカードの数字が奇数の場合と、3枚のうち2枚のカードの数字が偶数、1枚のカードの数字が奇数の場合である。3枚の奇数のカードの取り出し方は ${}_3C_3=10$ (通り)であり、2枚の偶数のカードと1枚の奇数のカードの取り出し方は ${}_4C_2\times {}_3C_1=30$ (通り)である。従って、求める確率は、

$$\frac{10+30}{84}=\frac{10}{21}$$

である。

(iv)

$x+2y-4=0$ に平行な単位方向ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であり、 $-3x+4y+1=0$ に平行な単位方向ベクトルは $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ であるため、内積の定義および $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right| \\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

が得られる。

(v)

2つの円の2つの共有点を通る直線の方程式は、

$$\begin{aligned}x^2+y^2-9-\{(x-4)^2+(y-3)^2-16\}&=0 \\ \Leftrightarrow y&=-\frac{4}{3}x+3\end{aligned}$$

と表せる。これを $x^2+y^2=9$ に代入して、

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=9 \\ \Leftrightarrow x^2+\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2&=9 \\ \Leftrightarrow 25x^2-72x&=0 \\ \Leftrightarrow x(25x-72)&=0 \\ \Leftrightarrow x&=0,\frac{72}{25}\end{aligned}$$

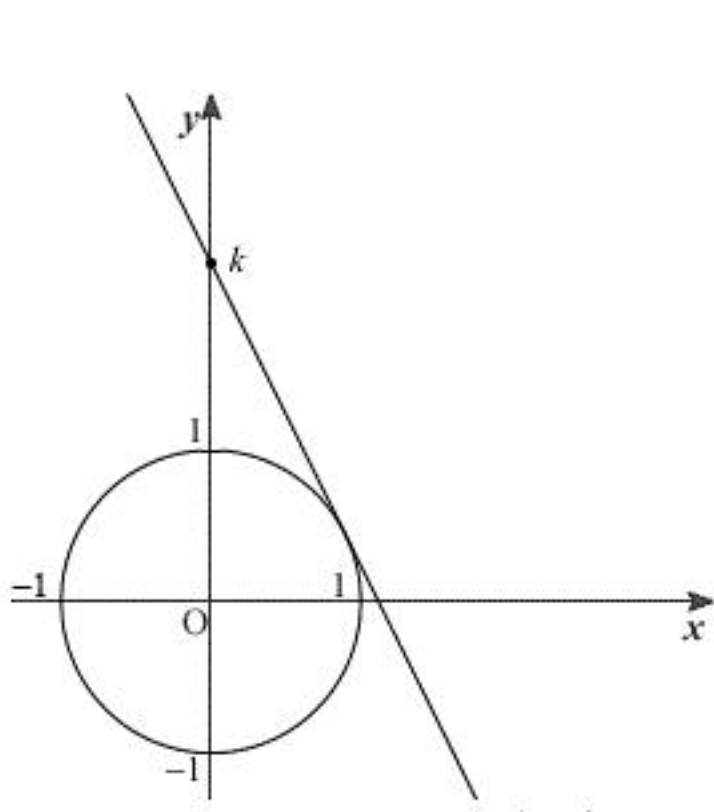
となり、これらは2つの円の共有点の x 座標であるため、中点の x 座標は

$$\frac{1}{2}\times\frac{72}{25}=\frac{36}{25}$$

である。

(vi)

$2x+y=k$ とおく。直線 $y=-2x+k$ が円 $x^2+y^2=1$ と共有点を持つときの y 切片 k の最大値を求めればよい。



y 切片 k が最大になるのは上図のように直線 $y=-2x+k$ が円 $x^2+y^2=1$ に第1象限で接するときである。このとき、点 $(0,0)$ と直線 $y=-2x+k$ の距離から、

$$\begin{aligned}\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}&=1 \\ \Leftrightarrow k&=\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

が成り立つ。第1象限で接するとき $k>0$ であるから、このとき $k=\sqrt{5}$ である。よって、 $2x+y$ の最大値は $\sqrt{5}$ である。

(vii)

$1+i=\alpha$ とおく。 α は $x^3+ax^2+8x+b=0$ の解であるから、

$$\alpha^3+a\alpha^2+8\alpha+b=0$$

が成り立つ。両辺の共役をとると、

$$\begin{aligned}\overline{\alpha^3+a\alpha^2+8\alpha+b}&=\overline{0} \\ \Leftrightarrow (\overline{\alpha})^3+a(\overline{\alpha})^2+8\overline{\alpha}+b&=0\end{aligned}$$

となるため、 $\overline{\alpha}$ も与えられた方程式の解である。残りの解を β と置くと、解と係数の関係より、

$$\begin{cases}\alpha\overline{\alpha}\beta=-b & \cdots\text{①} \\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha\beta+\overline{\alpha}\beta=8 & \cdots\text{②} \\ \alpha+\overline{\alpha}+\beta=-a & \cdots\text{③}\end{cases}$$

が成り立つ。②に $\alpha=1+i$ 、 $\overline{\alpha}=1-i$ を代入し、

$$\begin{aligned}(1+i)(1-i)+\beta\{(1+i)+(1-i)\}&=8 \\ \Leftrightarrow 2+2\beta&=8 \\ \Leftrightarrow \beta&=3\end{aligned}$$

が得られる。これを①と③に代入し、

$$\begin{aligned}a&=-(1+i)-(1-i)-3 \\&=-5 \\ b&=-3(1+i)(1-i) \\&=-6\end{aligned}$$

となる。

(viii)

$a_1>0$ 、 $c>0$ より任意の自然数 n に対し、 $a_n>0$ が成立する。よって、 $a_{n+1}=ca_n^2$ について両辺に底 c の対数をとると、

$$\begin{aligned}\log_c a_{n+1}&=\log_c ca_n^2 \\ \Leftrightarrow \log_c a_{n+1}&=2\log_c a_n+1 \\ \Leftrightarrow \log_c a_{n+1}+1&=2(\log_c a_n+1)\end{aligned}$$

となる。従って、数列 $\{\log_c a_n+1\}$ は初項 $\log_c a_1+1=1$ 、公比2の等比数列となる。よって、

$$\begin{aligned}\log_c a_n+1&=2^{n-1}\times 1 \\ \Leftrightarrow \log_c a_n&=-1+2^{n-1}\end{aligned}$$

が得られる。

II.

(i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (3t^2 - 4) dt \\ &= \left[t^3 - 4t \right]_0^x \\ &= x^3 - 4x \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^3 - 4x$

(ii)

p, q, r はすべて $f(x) = 0$ の解であり、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 0, 2 \end{aligned}$$

である。条件より、 $p < q < r$ であるため、 $(p, q, r) = (-2, 0, 2)$ となる。

(答) -2

(iii)

$f(x) = x^3 - 4x$ について

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

が得られる。 l, m はそれぞれ $P(p, 0), Q(q, 0)$ で C と接するため、 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) \\ \Leftrightarrow y &= 8x + 16 \end{aligned}$$

と表せ、 m の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(q)(x-q) \\ \Leftrightarrow y &= -4x \end{aligned}$$

と表せる。

(答) l の方程式: $y = 8x + 16$, m の方程式: $y = -4x$

(iv)

$$\begin{cases} y = 8x + 16 \\ y = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = y - 16 \\ 8x = -2y \end{cases}$$

であるため、これらから x を消去すると、

$$\begin{aligned} -2y &= y - 16 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。従って A の y 座標は $\frac{16}{3}$ となり、 $PQ = 2$ および PQ が x 軸上にあることから、 $\triangle PQB$

の面積は、

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

である。

(答) $\frac{16}{3}$

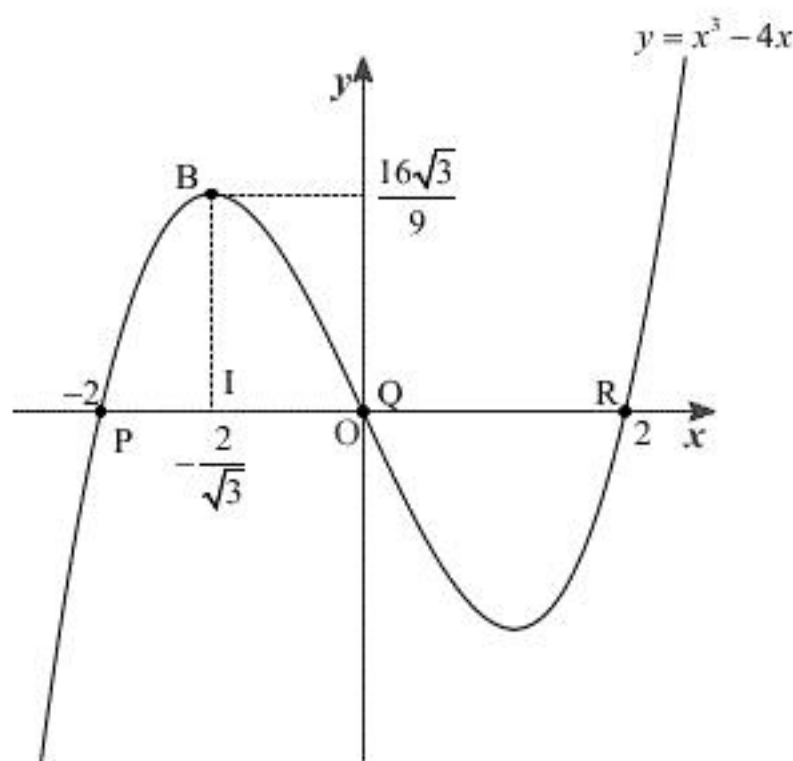
(v)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 4 \\ &= 3 \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

であるため、増減表は下表のようになる。

x	...	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↗

従って曲線 C は下図のグラフのようになる。



$\triangle PQB$ の面積は $\frac{1}{2} \times PQ \times |f(b)| = |f(b)|$ と表せる。グラフより、 $p < b < q$ のとき、 $|f(b)|$ が最

大となるのは $b = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ のときであるため、求める面積の最大値は、

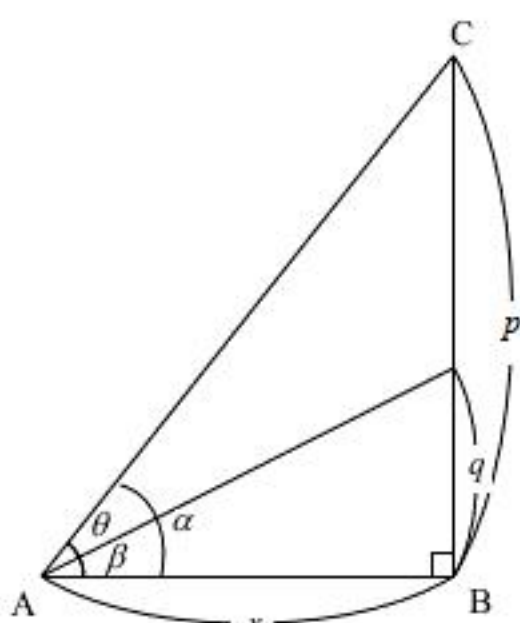
$$\left| f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \right| = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

である。

(答) $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

Ⅲ.

(i)



与えられた条件より、

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{p}{r}$$

$$\tan \beta = \frac{BD}{AB} = \frac{q}{r}$$

である。また、 $\tan$ の加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{p}{r} - \frac{q}{r}}{1 + \frac{p}{r} \cdot \frac{q}{r}} \\ &= \frac{r(p - q)}{r^2 + pq} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = \frac{p}{r}, \tan \beta = \frac{q}{r}, \tan \theta = \frac{r(p - q)}{r^2 + pq}$$

(ii)

$s = r - q \Leftrightarrow r = s + q$ であるため、これと $\theta = 45^\circ$ を $\tan \theta = \frac{r(p - q)}{r^2 + pq}$ に代入し、 $s > 0$ を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{r(p - q)}{r^2 + pq} \\ \Leftrightarrow \tan 45^\circ &= \frac{(s + q)(p - q)}{(s + q)^2 + pq} \\ \Leftrightarrow (s + q)^2 + pq &= (s + q)(p - q) \\ \Leftrightarrow s^2 + 2sq + q^2 + pq &= sp + pq - sq - q^2 \\ \Leftrightarrow sp &= s^2 + 3sq + 2q^2 \\ \Leftrightarrow p &= s + 3q + \frac{2q^2}{s} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = s + 3q + \frac{2q^2}{s}$$

(iii)

$q = 1$ より、 $r > 1$ 、 $s = r - 1 > 0$ であるから

「 r は 1 より大きい自然数である」 $\Leftrightarrow$ 「 s は自然数である」

が成立する。 $p = s + 3q + \frac{2q^2}{s}$ に $q = 1$ を代入することで、

$$\begin{aligned} p &= s + 3q + \frac{2q^2}{s} \\ \Leftrightarrow p &= s + 3 + \frac{2}{s} \\ \Leftrightarrow p - s - 3 &= \frac{2}{s} \end{aligned}$$

が得られる。従って、 $p - s - 3$ が整数であることより、 $\frac{2}{s}$ が整数となり、 $s > 0$ より $s = 1, 2$ が

得られる。逆に、 $p = s + 3 + \frac{2}{s}$ にこれらを代入すると、 p は q より大きい自然数となり、条件を満たす。よって、 $s = 1, 2$ である。

(答) 1, 2

(iv)

(ii) と同様に $s = r - q$ とおく。 $p = s + 3q + \frac{2q^2}{s}$ に $q = 2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} p &= s + 3q + \frac{2q^2}{s} \\ \Leftrightarrow p &= s + 6 + \frac{8}{s} \\ \Leftrightarrow p - s - 6 &= \frac{8}{s} \end{aligned}$$

が得られる。従って、 $p - s - 6$ が整数であることより、 $\frac{8}{s}$ が整数となり、 $s > 0$ より

$s = 1, 2, 4, 8$ が得られる。逆に、 $p = s + 6 + \frac{8}{s}$ にこれらを代入すると、 p は q より大きい自然数となり、条件を満たす。 $s = r - q \Leftrightarrow r = s + q$ より、 $r = 3, 4, 6, 10$ となる。

(答) 3, 4, 6, 10

(v)

(ii) と同様に $s = r - q$ とおく。 $p = s + 3q + \frac{2q^2}{s}$ に $q = 3$ を代入すると、

$$\begin{aligned} p &= s + 3q + \frac{2q^2}{s} \\ \Leftrightarrow p &= s + 9 + \frac{18}{s} \\ \Leftrightarrow p - s - 9 &= \frac{18}{s} \end{aligned}$$

が得られる。従って、 $p - s - 9$ が整数であることより、 $\frac{18}{s}$ が整数となり、 $s > 0$ より

$s = 1, 2, 3, 6, 9, 18$ が得られる。逆に、 $p = s + 9 + \frac{18}{s}$ にこれらを代入すると、 p は q より大きい自然数となり、条件を満たす。 $s = r - q \Leftrightarrow r = s + q$ より、 $r = 4, 5, 6, 9, 12, 21$ となる。

(答) 4, 5, 6, 9, 12, 21