

I.

【解答】

|        |                       |   |
|--------|-----------------------|---|
| (i)    | ア                     |   |
|        | $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ |   |
| (ii)   | イ                     | ウ |
|        | 26                    | 1 |
| (iii)  | エ                     |   |
|        | 6                     |   |
| (iv)   | オ                     |   |
|        | 31                    |   |
| (v)    | カ                     |   |
|        | 5                     |   |
| (vi)   | キ                     |   |
|        | $\frac{7}{6}$         |   |
| (vii)  | ク                     |   |
|        | $\frac{\sqrt{2}}{3}$  |   |
| (viii) | ケ                     |   |
|        | 3                     |   |

【解説】

(i)

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

より,

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1}{1+\tan^2\theta} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

と求まる。

(ii)

$\log_3(x+y)=3$ より,

$$x+y=3^3=27$$

であり, また  $\log_5(x-y)=2$  より,

$$x-y=5^2=25$$

である。ゆえに,

$$x=\frac{1}{2}(27+25)=26$$

$$y=\frac{1}{2}(27-25)=1$$

と求まる。

(iii)

$10=2\cdot 5$ より,  $25!$ が2と5でそれぞれ何回割り切れるかを考える。いま, 1から25までの整数の中で5の倍数は

$$25=5\cdot 5$$

より5個あり,  $5^2(=25)$ の倍数は

$$25=25\cdot 1$$

より1個あるから,  $25!$ は5で

$$5+1=6$$

回割り切れる。ここで,  $25!$ は明らかに2で6回以上割り切れる。よって $M=6$ である。

(iv)

初めて200000以上となる数字は211233であるから, 211233が小さい方から数えて何番目の数字であるかを求める。いま, 十万の位が1である数字は

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

個あるから, 211233は小さい方から数えて31番目の数字である。

(v)

データを小さい方から並べると,

$$2, 3, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 18, 19, 21$$

となるから, この11個のデータの中央値は10である。第1四分位数は中央値10よりも小さい

5個のデータ

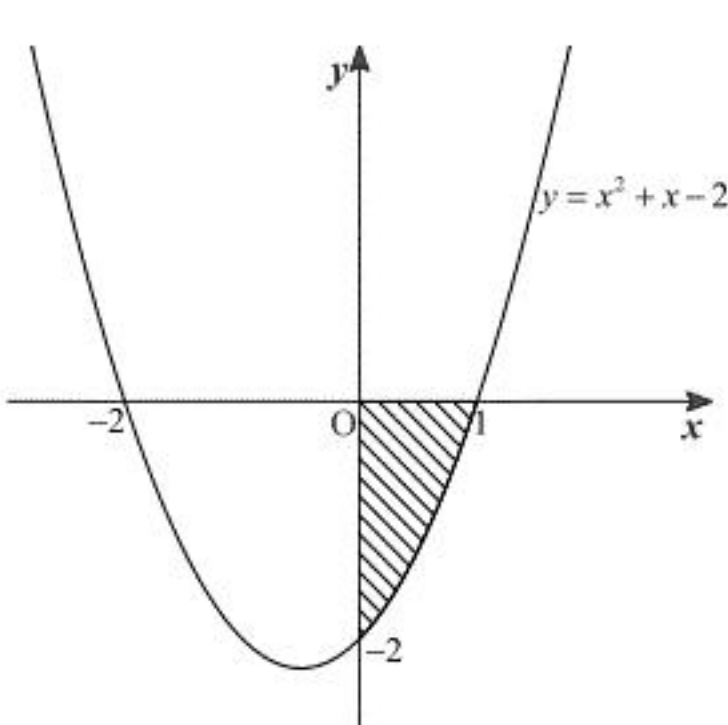
$$2, 3, 5, 6, 7$$

の中央値に等しく, その値は5である。

(vi)

$$\begin{aligned}y &= x^2+x-2 \\ &= (x+2)(x-1)\end{aligned}$$

と表せる。ここで, 放物線 $y=x^2+x-2$ を図示すると下図を得る。求める面積は斜線部分の面積となる。



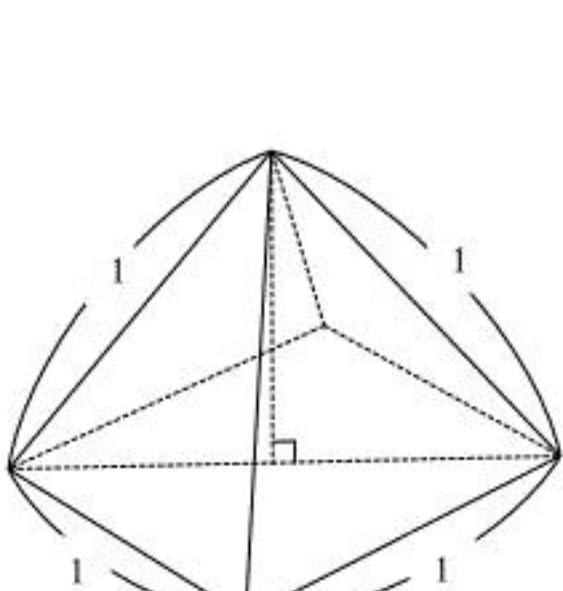
よって, 面積は

$$\begin{aligned}\int_0^1 -(x^2+x-2)dx &= -\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^1 \\ &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

と求まる。

(vii)

求める正八面体の体積は以下の四角錐の体積2個分に等しい。



この四角錐の高さを $h$ とすると, 底面が正方形であるから,  $h$ は頂点と底面の対角線の中点を結ぶ線分の長さとも一致する。ここで, 底面の対角線の長さは $\sqrt{2}$ であるから, 三平方の定理より

$$h=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。したがって, その体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

となる。よって, 正八面体の体積は

$$2\cdot \frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

と求まる。

(viii)

$$\begin{aligned}a-b &= (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \\ &= \sqrt{11+4\sqrt{7}}\cdot \sqrt{11-4\sqrt{7}} \\ &= \sqrt{11^2-4^2\cdot 7} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

(i)

は

と求まる。

(答)  $v = 2ax - a^2$

(ii)

$$s^2 - t = 2as - a^2$$
$$a^2 - 2sa + s^2 - t = 0$$
$$\begin{cases} q+r=2s \\ qr=s^2-t \end{cases}$$

とわかる。

(答)  $q+r=2s, qr=s^2-t$

(iii)

$$X = \frac{q+r}{2}, Y = \frac{q^2+r^2}{2}$$
$$\begin{aligned} q^2 + r^2 &= (q+r)^2 - 2qr \\ &= 4s^2 - 2(s^2 - t) \\ &= 2s^2 + 2t \end{aligned}$$
$$X = s, Y = s^2 + t$$

とわかる。

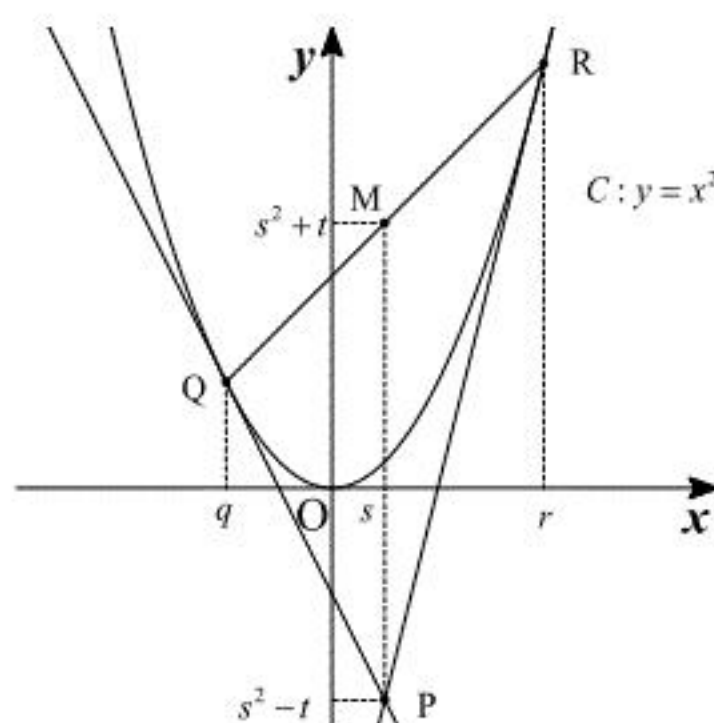
(答)  $M(s, s^2 + t)$

(iv)

(答)  $2t$

(v)

放物線  $y = x^2$ 、三角形 POR、および点 M を図示すると下図を得る。


$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \text{MP} \cdot \{(s-q) + (r-s)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{MP} \cdot (r-q) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(r-q)^2 &= (q+r)^2 - 4qr \\ &= 4s^2 - 4(s^2 - t) \\ &= 4t\end{aligned}$$
$$r - q = 2\sqrt{t}$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot 2\sqrt{t} \\ = 2t\sqrt{t}$$

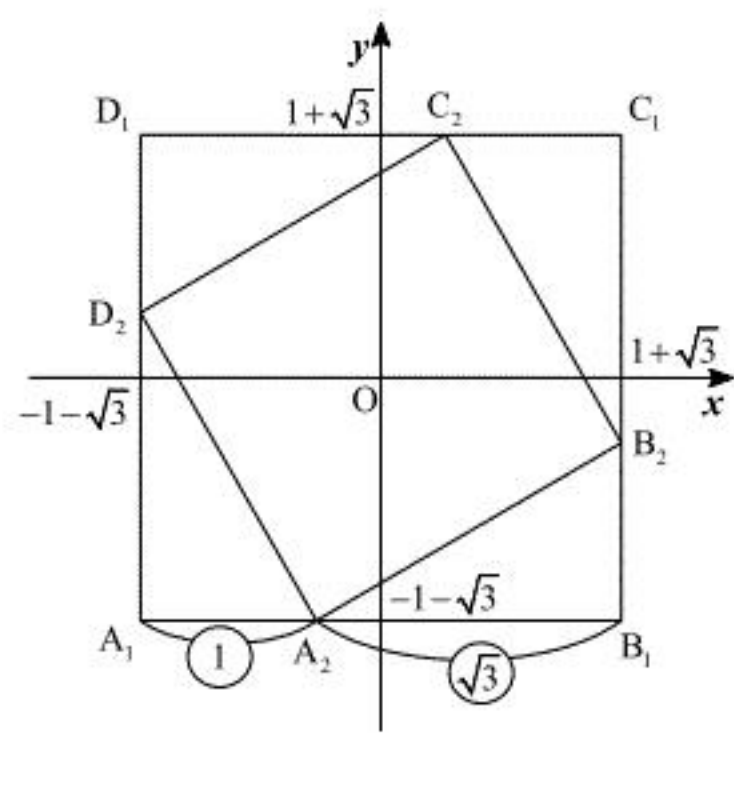
である。

(答)  $S = 2l\sqrt{l}$

### Ⅲ.

(i)

まず、2つの正方形  $A_1B_1C_1D_1$  と  $A_2B_2C_2D_2$  を図示すると下図のようになる。

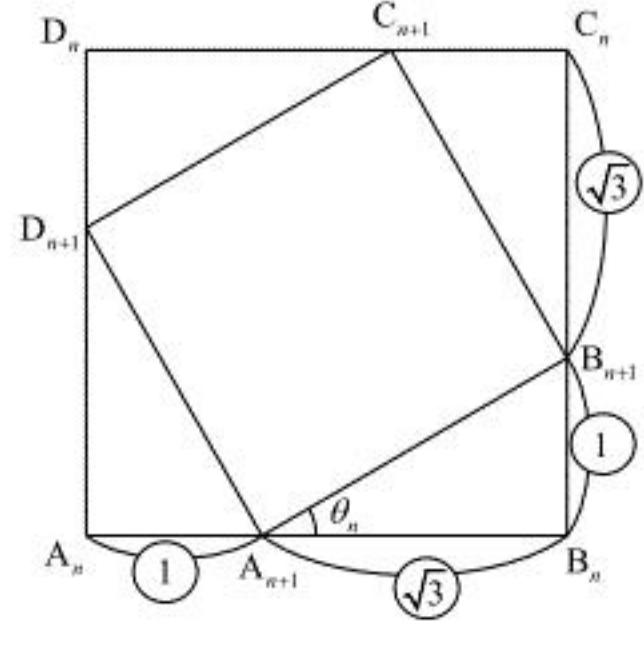


3点  $A_2, B_2, C_2$  はそれぞれ辺  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$  を  $1:\sqrt{3}$  に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} \\ &= \overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{A_1B_1} \\ &= (-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (2+2\sqrt{3}, 0) \\ &= (1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{OB_2} &= \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} \\ &= \overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{B_1C_1} \\ &= (1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (0, 2+2\sqrt{3}) \\ &= (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{OC_2} &= \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1C_2} \\ &= \overrightarrow{OC_1} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{C_1D_1} \\ &= (1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (-2-2\sqrt{3}, 0) \\ &= (-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。よって、 $A_2(1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}), B_2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}), C_2(-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$  である。ここで、2

つの正方形  $A_nB_nC_nD_n$  と  $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$  について考える。これらを図示すると下図のようになる。



直線  $A_nB_n$  から直線  $A_{n+1}B_{n+1}$  に向かって測ったときの2直線  $A_nB_n$  と  $A_{n+1}B_{n+1}$  のなす角を  $\theta_n$  とすると、

$$\tan \theta_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta_n = \frac{\pi}{6}$$

となる。ここで、直線  $A_2B_2$  と  $x$  軸のなす角  $\alpha$  を考える。直線  $A_1B_1$  は  $x$  軸と平行であるから、

$\alpha$  は2直線  $A_1B_1$  と  $A_2B_2$  のなす角  $\theta_1$  に等しい。よって、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$  である。

$$(\text{答}) A_2(1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}), B_2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}), C_2(-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}), \alpha = \frac{\pi}{6}$$

(ii)

(i)と同様に考えて、2点  $A_3, B_3$  はそれぞれ辺  $A_2B_2, B_2C_2$  を  $1:\sqrt{3}$  に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_3} &= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \\ &= \overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{A_2B_2} \\ &= (1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (2\sqrt{3}, 2) \\ &= (4-2\sqrt{3}, -2) \\ \overrightarrow{OB_3} &= \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{B_2B_3} \\ &= \overrightarrow{OB_2} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{B_2C_2} \\ &= (1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (-2, 2\sqrt{3}) \\ &= (2, 4-2\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。よって、 $A_3(4-2\sqrt{3}, -2), B_3(2, 4-2\sqrt{3})$  である。また、直線  $A_3B_3$  と  $x$  軸のなす角  $\beta$  は

2直線  $A_3B_3$  と  $A_2B_2$  のなす角  $\theta_2$  と直線  $A_2B_2$  と  $x$  軸のなす角  $\alpha$  の和に等しい。よって、

$$\begin{aligned}\beta &= \theta_2 + \alpha \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) A_3(4-2\sqrt{3}, -2), B_3(2, 4-2\sqrt{3}), \beta = \frac{\pi}{3}$$

(iii)

$$p = (1+\sqrt{3}) - (-1-\sqrt{3})$$

$$= 2+2\sqrt{3}$$

である。 $q$  について、(i)より

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\{(1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})\}^2 + \{(1-\sqrt{3}) - (-1-\sqrt{3})\}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{12+4} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。さらに、 $r$  について、(ii)より

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\{(4-2\sqrt{3}) - 2\}^2 + \{(-2) - (4-2\sqrt{3})\}^2} \\ &= 4\sqrt{4-2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}\left(\frac{q}{p}\right)^2 &= \left(\frac{4}{2+2\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{q}\right)^2 &= \left(\frac{4\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4}\right)^2 \\ &= 4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{q}{p}\right)^2 = 4-2\sqrt{3}, \left(\frac{r}{q}\right)^2 = 4-2\sqrt{3}$$

(iv)

(i)の図より正方形  $A_nB_nC_nD_n$  の1辺の長さを  $l_n$  とする。このとき、三角形  $A_{n+1}B_nB_{n+1}$  において三平方の定理を用いることで、 $l_{n+1}$  は  $l_n$  を用いて、

$$\begin{aligned}l_{n+1} &= \sqrt{A_{n+1}B_n^2 + B_nB_{n+1}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}l_n\right)^2 + \left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}l_n\right)^2} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{3}}l_n \\ &= (\sqrt{3}-1)l_n\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $s=l_4$  であるから、

$$\begin{aligned}s &= (\sqrt{3}-1)l_3 \\ &= (\sqrt{3}-1)r \\ &= 4(\sqrt{3}-1)\sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ &= 4(\sqrt{3}-1)^2 \\ &= 8(2-\sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。よって、

(v)

まず  $A_4$  の座標を求める。点  $A_4$  は辺  $A_3B_3$  を  $1:\sqrt{3}$  に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_4} &= \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} \\ &= \overrightarrow{OA_3} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \overrightarrow{A_3B_3} \\ &= (4-2\sqrt{3}, -2) + \frac{1}{1+\sqrt{3}} (-2+2\sqrt{3}, 6-2\sqrt{3}) \\ &= (8-4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3})\end{aligned}$$

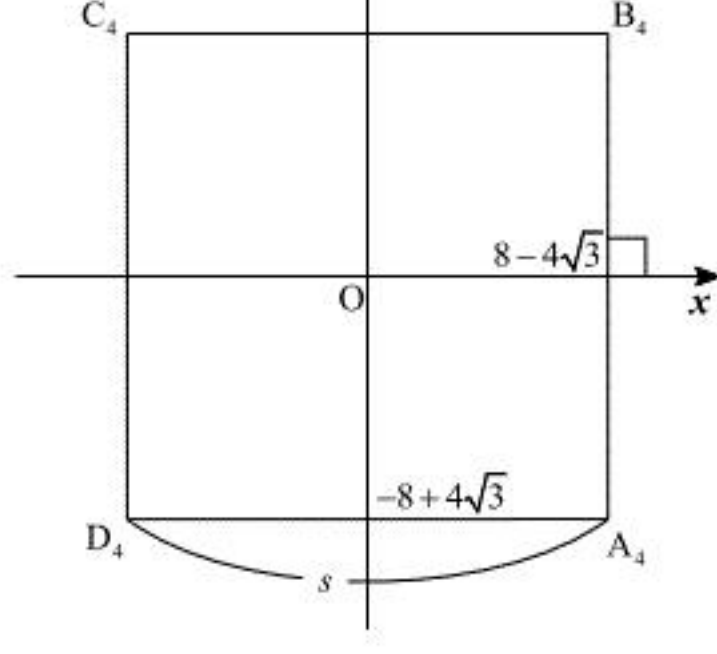
となる。よって、 $A_4(8-4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3})$  である。ここで、直線  $A_4B_4$  と  $x$  軸のなす角を  $\gamma$  とする。

このとき  $\gamma$  は2直線  $A_4B_4$  と  $A_3B_3$  のなす角  $\theta_3$  と直線  $A_3B_3$  と  $x$  軸のなす角  $\beta$  の和に等しい。

よって、

$$\begin{aligned}\gamma &= \theta_3 + \beta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

となる。このことから正方形  $A_4B_4C_4D_4$  は下図のようになり、直線  $D_4A_4$  は  $x$  軸に平行である。



よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_4} &= \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{A_4D_4} \\ &= \overrightarrow{OA_4} + (-s, 0) \\ &= (8-4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3}) + (-8(2-\sqrt{3}), 0) \\ &= (-8+4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3})\end{aligned}$$

となり、 $D_4(-8+4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3})$  である。

$$(\text{答}) D_4(-8+4\sqrt{3}, -8+4\sqrt{3})$$