

I.

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
$\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{11}{3}}$	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{5}$	13	5	2	1

〔解説〕

(i)

$\left|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right|=I$ とおくと、 $I\geq 0$ より I^2 が最小値をとるとき I も最小値をとる。ここで、

$$\begin{aligned} I^2 &= \left|t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right|^2 \\ &= t^2\left|\vec{a}\right|^2 + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)^2\left|\vec{b}\right|^2 \\ &= t^2\cdot 2^2 + 2t(1-t)\cdot 3 + (1-t)^2\cdot (\sqrt{5})^2 \\ &= 3t^2 - 4t + 5 \\ &= 3\left(t-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

と計算でき、これより $t=\frac{2}{3}$ で I^2 が最小値をとることがわかる。したがって、 $t=\frac{2}{3}$ で

I は最小値をとり、このとき $I=\sqrt{\frac{11}{3}}$ となる。

(ii)

A, B, C は三角形の内角だから、 $0 < A < \pi, 0 < B < \pi$ より $\sin A > 0, \sin B > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(\pi - A - B) \\ &= \sin(A + B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

となる。

(iii)

初項を a 、公比を r とすると、 $a_n = ar^{n-1}$ ($a \neq 0, r \neq 0$)となる。与式より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} &= 3, \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} = 2 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{r} &= 3a, 1 + \frac{1}{r} = 2ar \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{r} &= 3a, 3a = 2ar \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3}{2}, a = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

と計算される。また、無限等比級数の公式により、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{2}{3}} \left(\because \left|\frac{2}{3}\right| < 1\right) \\ &= \frac{27}{5} \end{aligned}$$

となる。

(iv)

$37x+15y=1$ から $37\cdot(-2)+15\cdot 5=1$ を辺々引いて、

$$\begin{aligned} 37(x+2)+15(y-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow 37(x+2) &= -15(y-5) \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、ここで37と15は互いに素であるから、 $x+2=15k$ (k は整数)と表せる。変形すると $x=15(k-1)+13$ となり、 x を15で割った余りは13とわかる。さらにこれを①式に代入すると、

$$\begin{aligned} 37\cdot 15k &= -15(y-5) \\ \Leftrightarrow y &= -37k+5 \end{aligned}$$

と計算され、 $y=37\cdot(-k)+5$ と表せるから、 y を37で割った余りは5とわかる。

(v)

[1] $a=1$ のとき

$|x|\geq 0, |y|\geq 0$ であるから、条件 A の $|x|+|y|\leq 1$ を満たすとき、 $0\leq |x|\leq 1, 0\leq |y|\leq 1$ となるため、 $A\Rightarrow B$ は成立する。一方、 $B\Rightarrow A$ は成立しない。反例は $x=1, y=1$ などである。したがって、 A は B であるための十分条件であるが、必要条件でない。

[2] $a=2$ のとき

条件 B の $|x|\leq 1, |y|\leq 1$ を辺々足し合わせると $|x|+|y|\leq 2$ となり、 $B\Rightarrow A$ は成立するが、 $A\Rightarrow B$ は成立しない。反例は $x=2, y=0$ などである。したがって、 A は B であるための必要条件であるが、十分条件でない。

II.

【解答】

(i)	$q_1 = 0, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = 0, q_4 = \frac{3}{8}$	(ii)	$q_{2n-1} = 0$
(iii)	$q_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$	(iv)	$M = \frac{n^2}{2}, m = \frac{n}{2}$
(v)	$\frac{1}{2^{2n-1}}$	(vi)	$\frac{1}{2^n}$

【解説】

(i)

$n=1$ のとき、 $P_1(1, 0)$ または $P_1(0, 1)$ に動くため、 P が $y=x$ 上にあることがないから $q_1=0$ となる。 $n=2$ のとき、硬貨の裏表の出方は 2^2 通りあり、そのうち表と裏が 1 回ずつ出る 2 通りが条件を満たすから、

$$q_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

となる。 $n=3$ のときについて考える。点 P が $y=x$ 上にある条件は、表が出る回数と裏が出る回数が同じになることである。しかし 3 回硬貨を投げてその条件を満たすことはないから、 $q_3=0$ となる。 $n=4$ のとき、硬貨の裏表の出方は 2^4 通りあり、そのうち条件を満たす出方は、表がちょうど 2 回でる出方だから ${}_4C_2$ 通りである。したがって、

$$q_4 = \frac{{}_4C_2}{2^4} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{8}$$

となる。

(ii)

q_3 を求めたときと同様に考える。点 P が $y=x$ 上にある条件は、表が出る回数と裏が出る回数が同じになることであるが、硬貨を奇数回投げたときにその条件を満たすことはない。したがって $q_{2n-1}=0$ となる。

(iii)

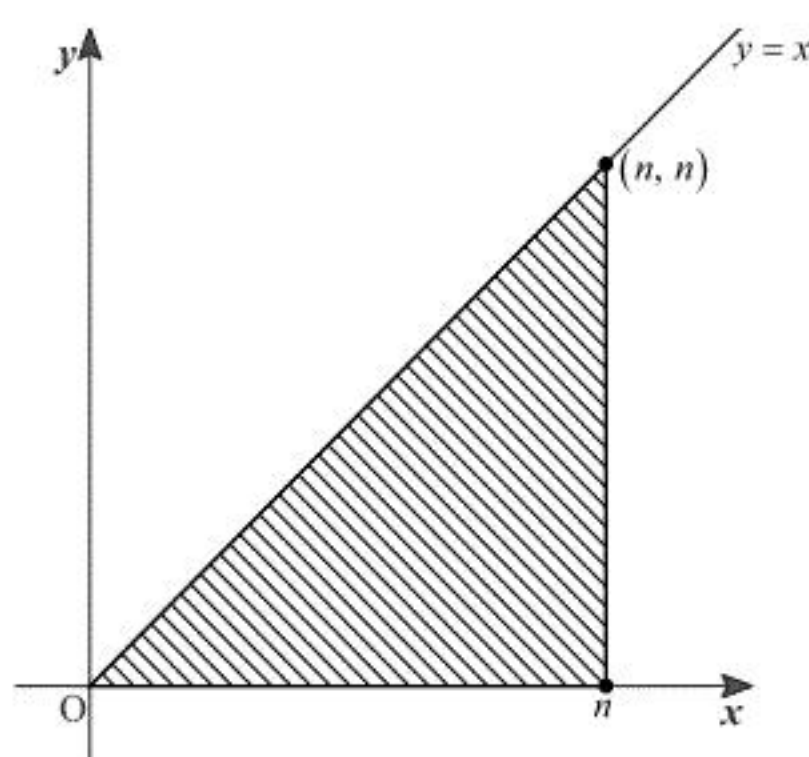
$2n$ 回硬貨を投げたとき、裏表の出方は 2^{2n} 通りである。そのうち条件を満たす出方は、表がちょうど n 回出るときだから、 ${}_{2n}C_n$ 通りである。したがって、

$$q_{2n} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

となる。

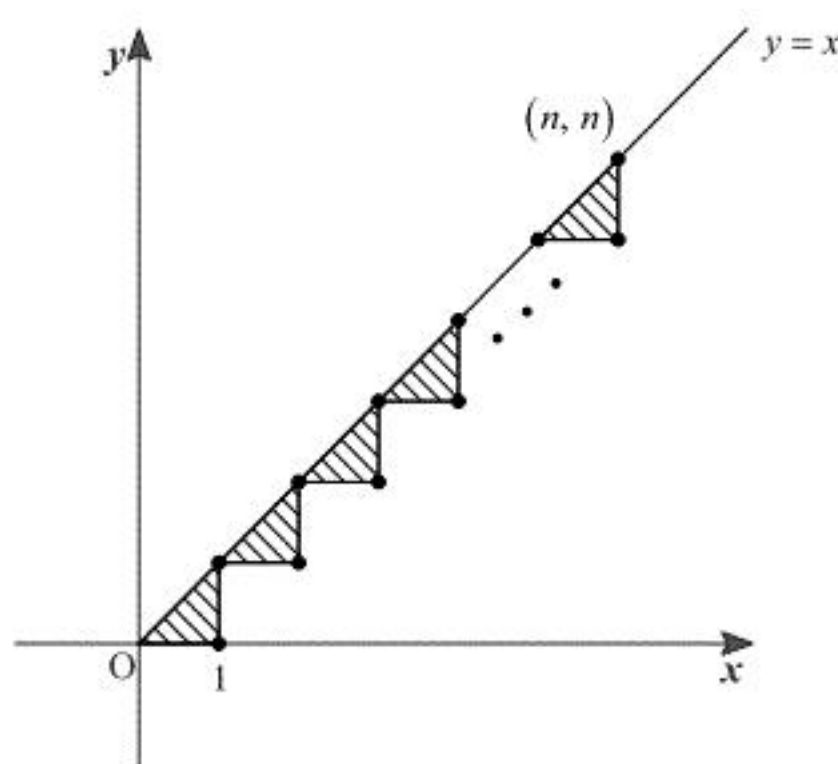
(iv)

直線 $y=x$ についての対称性により、すべての図形が直線 $y=x$ の下側に集まっているときを考えると、下図のときに S_{2n} が最大となることがわかる。



斜線部分は斜辺以外の 1 辺の長さが n の直角二等辺三角形だから、 $M = \frac{n^2}{2}$ となる。一方で

S_{2n} が最小となるのは、同様に考えて、偶数回目に硬貨を投げたとき毎回点 P が直線 $y=x$ 上にくるとき、すなわち次図のようなときである。



m は斜辺以外の 1 辺の長さが 1 の直角二等辺三角形 n 個の面積の和で計算でき、

$$m = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot n = \frac{n}{2}$$

となる。

(v)

すべてのコインの表裏の出方は 2^{2n} 通りであり、 $S_{2n} = M$ となる図形は直線 $y=x$ の上側と下側に 1 つずつ存在するから、2 通りである。したがって確率は、

$$\frac{2}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

となる。

(vi)

$S_{2n} = m$ となる出方において、斜辺以外の一辺の長さが 1 の直角二等辺三角形 n 個がそれぞれ直線 $y=x$ の上側と下側に 1 つずつとりうるから、出方は 2^n 通りである。したがって、確率は

$$\frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}$$

となる。

III.

(i)

$x > 0$ において、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(\log x)^2 + 5\log x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log x + 2)(2\log x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x = -2, \log x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

と計算される。

$$(\text{答}) \quad x = e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}}$$

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} \quad (x > 0) \text{ を微分して,} \\ f'(x) &= \frac{\left(4\log x \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{x}\right) \cdot x - \{2(\log x)^2 + 5\log x + 2\}}{x^2} \\ &= -\frac{2(\log x)^2 + \log x - 3}{x^2} \\ &= \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \text{ より } x > 0 \text{ において,} \\ \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\log x - 1)(2\log x + 3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq \log x \leq 1 \\ \Leftrightarrow \log e^{-\frac{3}{2}} &\leq \log x \leq \log e^1 \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}} &\leq x \leq e \end{aligned}$$

と計算される。

$$(\text{答}) \quad e^{-\frac{3}{2}} \leq x \leq e$$

(iv)

$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -e^{\frac{3}{2}}, f(e) = \frac{9}{e}$ と計算される。(iii)を参考にして増減表を書くと、以下のようになる。

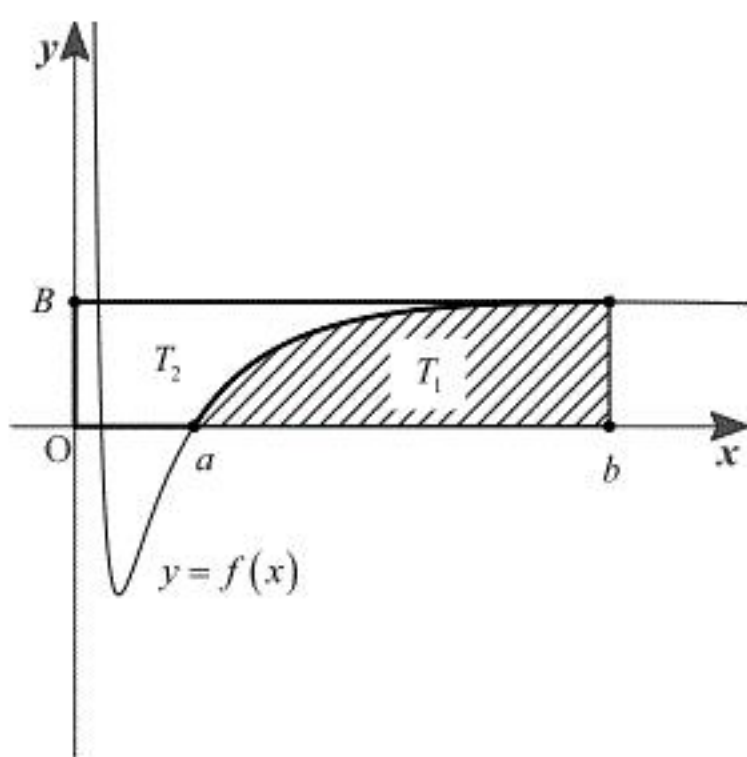
x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			$-e^{\frac{3}{2}}$		$\frac{9}{e}$	

これより極大値 $\frac{9}{e}$ 、極小値 $-e^{\frac{3}{2}}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値 } \frac{9}{e}, \text{ 極小値 } -e^{\frac{3}{2}}$$

(v)

(i), (iv)より $a = e^{-\frac{1}{2}}, b = e$ となる。求める積分値を S_1 とすると、これは次図の斜線部 T_1 の面積である。



積分値は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^e \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} dx \end{aligned}$$

と表され、 $x = e'$ とおくと、 $\frac{dx}{dt} = e'$ となり、変数は下表のようになる。

x	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\rightarrow$	e
t	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	1

よって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{2(\log e')^2 + 5\log e' + 2}{e'} \cdot e' dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (2t^2 + 5t + 2) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 2t \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{45}{8} \end{aligned}$$

と計算される。

$$(\text{答}) \quad a = e^{-\frac{1}{2}}, b = e, \int_a^b f(x) dx = \frac{45}{8}$$

(vi)

$y = g(x)$ は $y = f(x)$ の逆関数だから、求める積分値 $\int_0^b g(x) dx = \int_0^b g(y) dy$ を S_2 とすると、これは前図の太線で囲まれた部分 T_2 の面積となる。ここで $S_1 + S_2$ は横の長さが b 、縦の長さが B の長方形の面積だから、長方形の面積から S_1 の値を引いて、

$$\begin{aligned} S_2 &= Bb - S_1 \\ &= \frac{9}{e} \cdot e - \frac{45}{8} \\ &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

と計算される。

$$(\text{答}) \quad \int_0^b g(x) dx = \frac{27}{8}$$

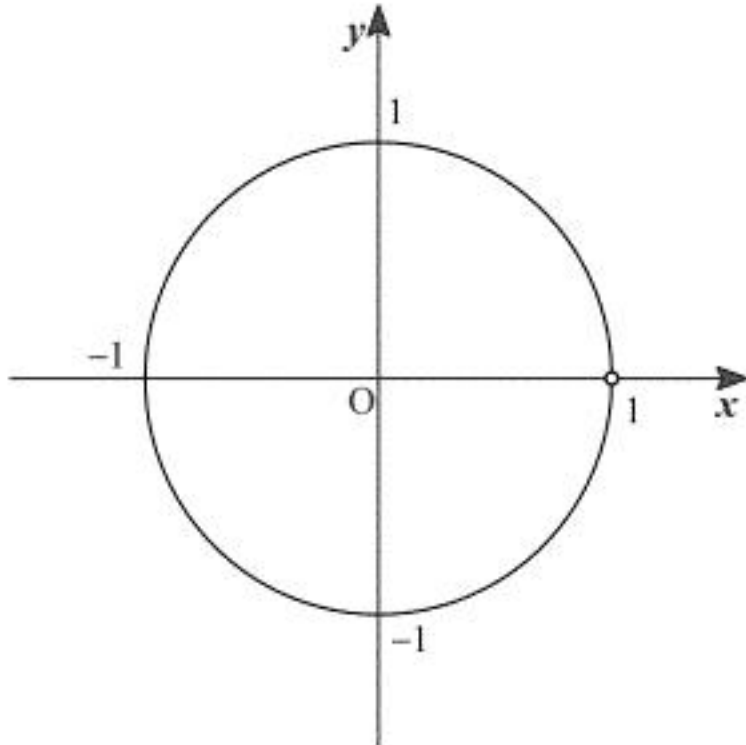
IV.

(i)

$AB = |z^2 - z|$, $BC = |z^3 - z^2|$ と表される。 $z \neq 0, 1$ のもとで

$$\begin{aligned} AB &= BC \\ \Leftrightarrow |z^2 - z| &= |z^3 - z^2| \\ \Leftrightarrow |z||z-1| &= |z|^2|z-1| \\ \Leftrightarrow |z||z-1|(|z|-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow |z| &= 1 \end{aligned}$$

と計算され、これは原点を中心とする半径1の円を表すから図示すると、下図の実線部となる。ただし点(1)は除く。



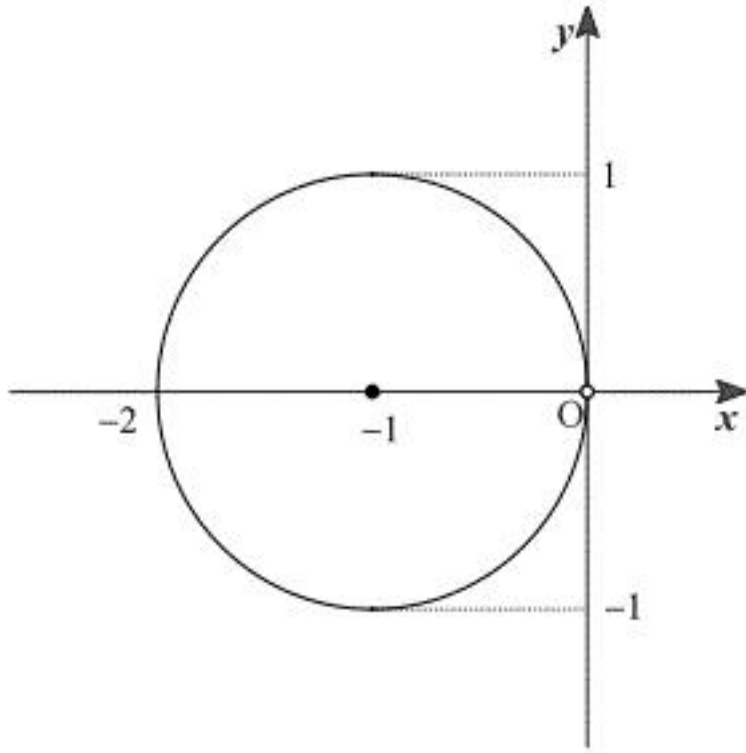
(答) 必要十分条件： $|z|=1$ かつ $z \neq 1$, 図形：前図 (点(1)は除く)

(ii)

$AC = |z^3 - z|$ と表される。 $z \neq 0, 1$ のもとで

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ \Leftrightarrow |z^2 - z| &= |z^3 - z| \\ \Leftrightarrow |z||z-1| &= |z||z-1||z+1| \\ \Leftrightarrow |z||z-1|(|z+1|-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow |z+1| &= 1 \end{aligned}$$

と計算され、これは点(-1)を中心とする半径1の円を表すから図示すると、下図の実線部となる。ただし原点は除く。



(答) 必要十分条件： $|z+1|=1$ かつ $z \neq 0$, 図形：前図 (原点は除く)

(iii)

三角形 ABC が正三角形となる条件は $AB = BC$ かつ $AB = AC$ である。つまり(i)(ii)より条件は、 $|z|=1$ かつ $|z+1|=1$ である。ここで、 $|z+1|=1$ を変形すると

$$\begin{aligned} |z+1| &= 1 \\ \Leftrightarrow |z+1|^2 &= 1^2 \\ \Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) &= 1 \\ \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow |z|^2 \cdot z + z^2 + \bar{z} \cdot z &= 0 \quad (\because z \neq 0) \\ \Leftrightarrow z^2 + z + 1 &= 0 \quad (\because |z|^2 = 1) \end{aligned}$$

となり、これを解くと $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ となる。この2解は $|z|=1$ を満たす。

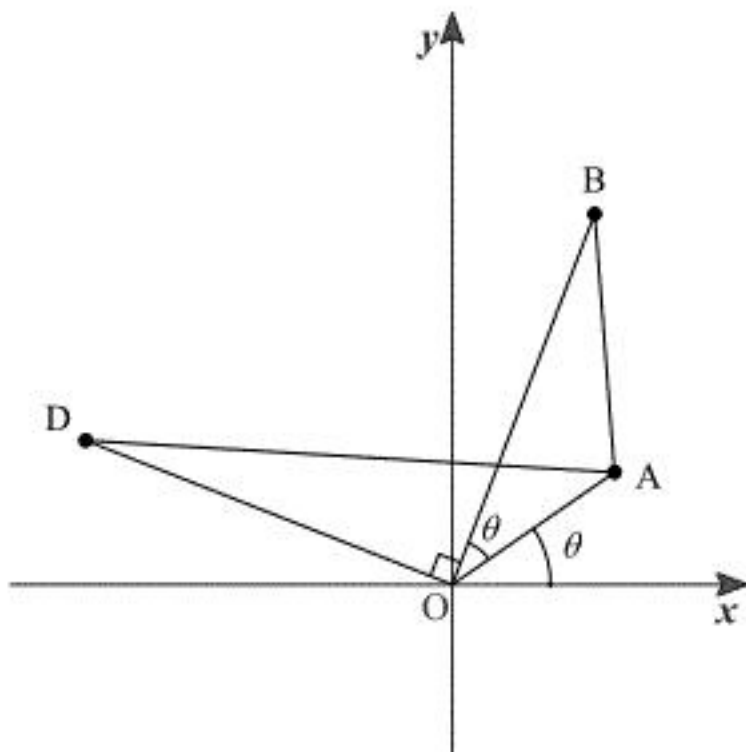
(答) $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(iv)

ド・モアブルの定理より、点 B は $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$, 点 D は

$$\begin{aligned} iz^2 &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= r^2 \left\{ \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

と表される。



このとき $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから図のように $\angle AOB = 2\theta - \theta = \theta$, $\angle AOD = 2\theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \theta + \frac{\pi}{2}$ となり、また $r > 0$ より $OA = r$, $OB = OD = r^2$ であることを用いて、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \\ &= \frac{r^3}{2} \sin \theta \\ T &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OD \cdot \sin \angle AOD \\ &= \frac{r^3}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{r^3}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{r^3}{2} \sin \theta$, $T = \frac{r^3}{2} \cos \theta$

(v)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ となり、これらと $r > 0$ のもとで

$$\begin{aligned} S &= T \\ \Leftrightarrow \frac{r^3}{2} \sin \theta &= \frac{r^3}{2} \cos \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \cos \theta \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= 1 \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$