

1

【解答】

(i)	ア	イ
	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{11}{3}}$
(ii)	ウ	
	$\frac{7\sqrt{2}}{10}$	
(iii)	エ	オ
	$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{5}$
(iv)	カ	キ
	13	5
(v)	ク	ケ
	2	1

【解説】

(i)

$|\vec{t}\vec{a}+(1-t)\vec{b}|$ を2乗すると

$$\begin{aligned} |\vec{t}\vec{a}+(1-t)\vec{b}|^2 &= t^2|\vec{a}|^2 + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)^2|\vec{b}|^2 \\ &= 4t^2 + 2t(1-t)\cdot 3 + (1-t)^2\cdot 5 \\ &= 3t^2 - 4t + 5 \\ &= 3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3} \end{aligned}$$

となるから、 $|\vec{t}\vec{a}+(1-t)\vec{b}|$ の最小値は $\sqrt{3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}}$ の最小値である。よって

$$t = \frac{2}{3} \text{ のとき、最小値 } \sqrt{\frac{11}{3}}$$

をとることが分かる。

(ii)

$A+B+C=\pi$ より $C=\pi-(A+B)$ となるから

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin\{\pi-(A+B)\} \\ &= \sin(A+B) \end{aligned}$$

となる。ここで、加法定理より

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。さらに、 $\cos A = \frac{3}{5}$ 、 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $0 < A+B < \pi$ であるから、 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ 、 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ であ

り、 $\sin A > 0$ 、 $\sin B > 0$ となることが分かる。よって

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5} \\ \sin B &= \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となるから、これらを①に代入して

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(A+B) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

が得られる。

(iii)

等比数列 $\{a_n\}$ について、初項を $a_1 = a$ 、公比を r (ただし、 a, r は $a \neq 0$ かつ $r \neq 0$ を満たす実数とする) とおくと

$$a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2$$

となる。これらを与えられた式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{r+1}{ar} &= 3 \\ \Leftrightarrow r+1 &= 3ar \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{r+1}{ar^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow r+1 &= 2ar^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。よって、①と②より

$$\begin{aligned} 3ar &= 2ar^2 \\ \Leftrightarrow ar(3-2r) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a \neq 0$ かつ $r \neq 0$ より

$$\begin{aligned} 3-2r &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。次に、 $r = \frac{3}{2}$ のとき、①より $a = \frac{5}{9}$ となるから

$$a_n = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

と表すことができる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \\ &= \frac{27}{5} \end{aligned}$$

となる。

(iv)

$$37x+15y=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

について、 $x=-2, y=5$ は1つの解であるから

$$37 \cdot (-2) + 15 \cdot 5 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とかける。①、②の辺々を引くと

$$\begin{aligned} 37(x+2)+15(y-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow 37(x+2) &= -15(y-5) \end{aligned}$$

となる。ここで、15と37は互いに素であるから、 $x+2$ と $y-5$ は整数 n を用いて

$$\begin{aligned} x+2 &= -15n \\ y-5 &= 37n \end{aligned}$$

と表される。よって

$$\begin{aligned} x &= -15n-2 = 15(-n-1)+13 \\ y &= 37n+5 \end{aligned}$$

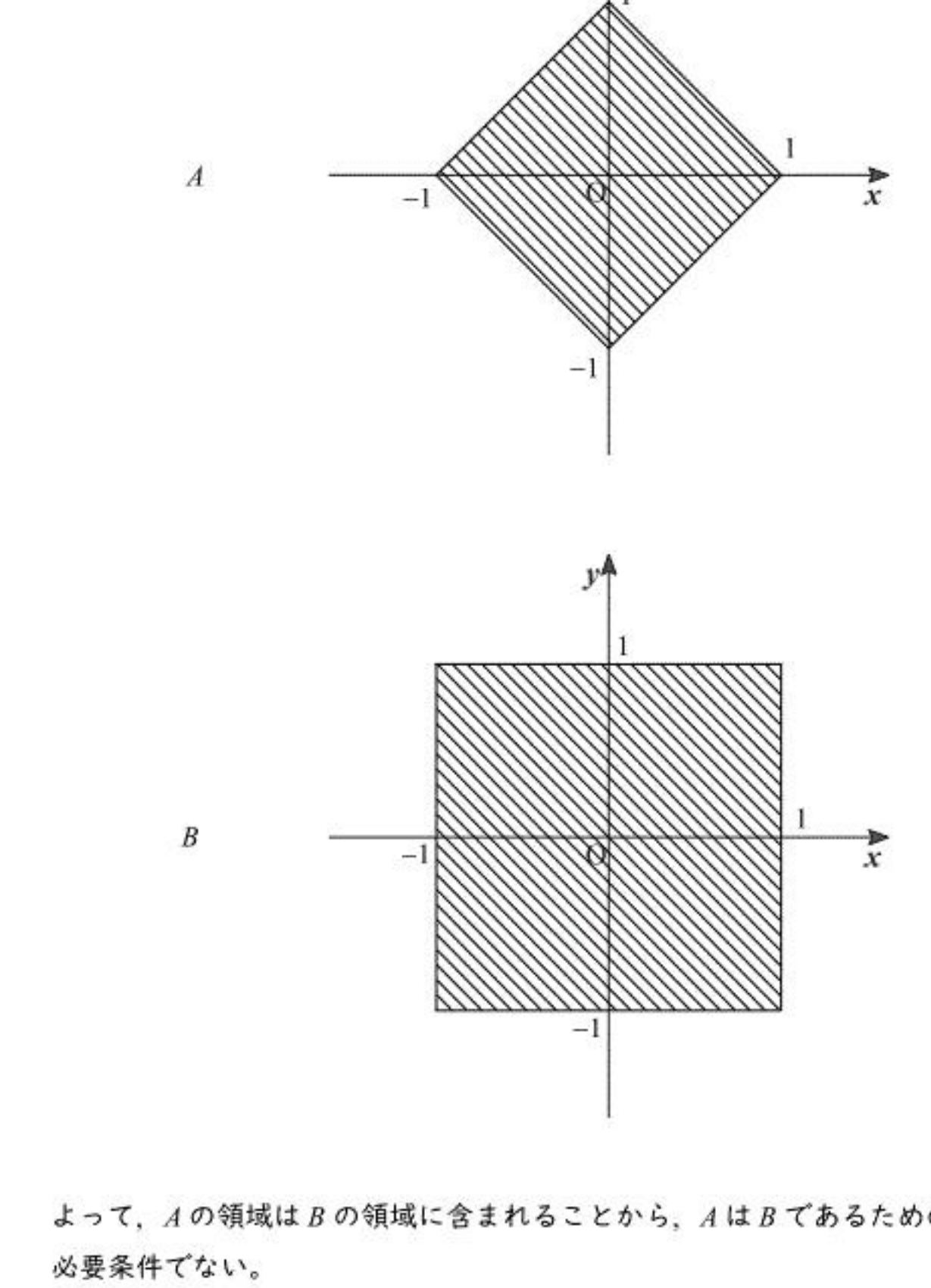
となる。

(v)

$$A: |x|+|y| \leq a$$

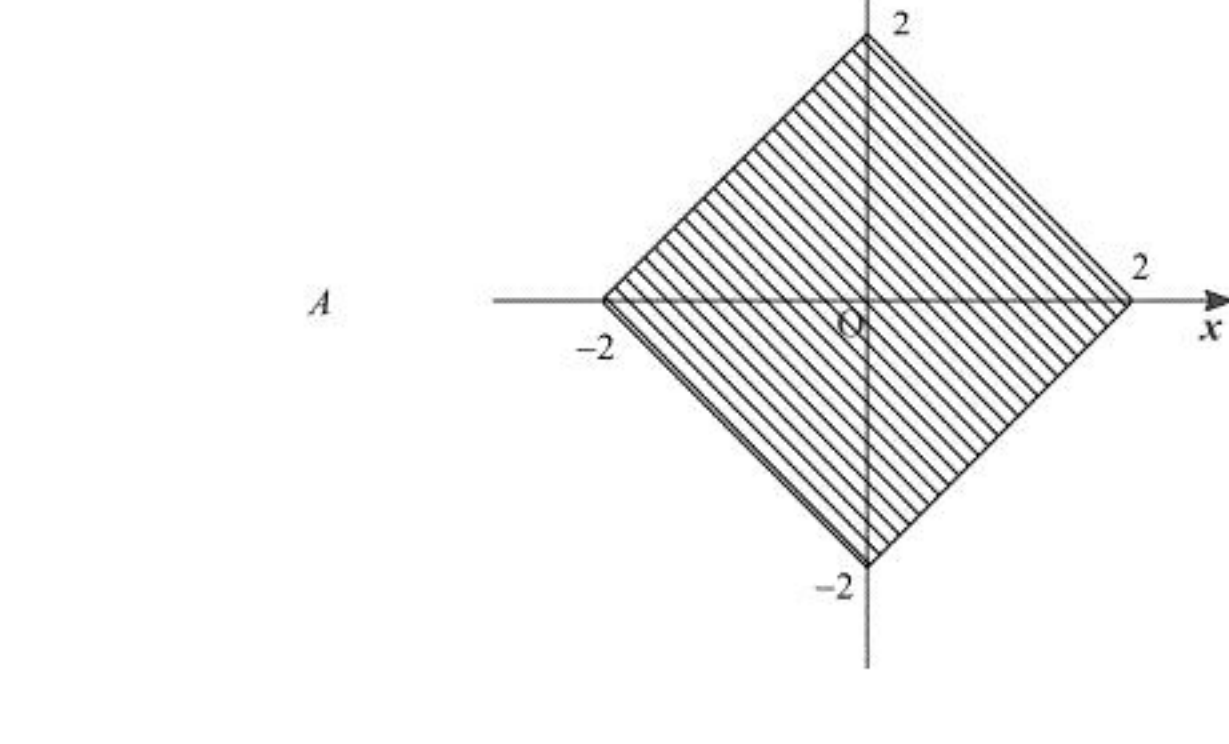
$$B: |x| \leq 1 \text{ かつ } |y| \leq 1$$

について、まず $a=1$ のときを考える。それぞれ図示すると、以下のようになる。



よって、 A の領域は B の領域に含まれることから、 A は B であるための十分条件であるが、必要条件でない。

次に $a=2$ のときを考える。 A が示す領域を図示すると、以下のようになる。



よって、 B の領域は A の領域に含まれることから、 A は B であるための必要条件であるが、十分条件でない。

II

(i)

q_1 について、1 回硬貨を投げたとき、点 P は $(1, 0), (0, 1)$ のどちらかにいるので直線 $y = x$ 上にあることはない。よって、

$$q_1 = 0$$

である。

q_2 は、2 回硬貨を投げた時、点 P が $(1, 1)$ にある確率であるから

$$q_2 = {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

である。

q_3 について、3 回硬貨を投げたとき、点 P は $(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$ のいずれかにいることから、直線 $y = x$ 上にあることはない。よって、

$$q_3 = 0$$

である。

q_4 は、4 回硬貨を投げたとき、点 P が $(2, 2)$ にある確率であるから

$$q_4 = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad q_1 = 0, q_2 = \frac{1}{2}, q_3 = 0, q_4 = \frac{3}{8}$$

(ii)

点 P が直線 $y = x$ 上にあるためには、硬貨の表と裏がそれぞれ同じ回数出なければならないことから、奇数回投げた後直線 $y = x$ 上にあることはない。よって

$$q_{2n-1} = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_{2n-1} = 0$$

(iii)

q_{2n} は、 $2n$ 回硬貨を投げたとき、点 P が (n, n) にある確率であるから、表と裏がそれぞれ n 回ずつ出ればよい。よって

$$q_{2n} = {}_{2n}C_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

(iv)

P_{2n} が直線 $y = x$ 上にあるとき、その座標は (n, n) であり、表と裏がそれぞれ n 回ずつ出ればよい。よって、 S_{2n} の最大値は、表が n 回連続出た後、裏が n 回連続出たとき、又は裏が n 回連続出た後、表が n 回連続出たとき、それぞれ、 $(0, 0), (n, 0), (n, n)$ の 3 点、又は $(0, 0), (0, n), (n, n)$ の 3 点を頂点とする三角形の面積に等しいことから

$$M = \frac{n^2}{2}$$

となる。次に、 S_{2n} の最小値は、 P_{2k} (ただし、 k は $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数とする) が常に直線 $y = x$ 上にあるときに、最小値をとる。 $P_{2(k-1)} (k-1, k-1), P_{2k} (k, k)$ と $(k, k-1)$ 又は

$(k-1, k)$ の 3 点を頂点とする三角形の面積は $\frac{1}{2}$ であるから

$$m = \frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad M = \frac{n^2}{2}, m = \frac{n}{2}$$

(v)

表が n 回連続出た後、裏が n 回連続出るか、裏が n 回連続出た後、表が n 回連続出るかのどちらかであることから、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2 = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2^{2n-1}}$$

(vi)

P_{2k} が常に直線 $y = x$ 上にあればよい。 $(k-1, k-1)$ から (k, k) に移動する確率は、(i) で求め

た q_2 に等しく、 $\frac{1}{2}$ である。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ⅲ

$$f(x) = \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} \quad (x > 0)$$

について考える。

(i)

$f(x) = 0$ を考えると

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(\log x)^2 + 5\log x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log x + 2)(2\log x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x &= -2, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから x の値は

$$x = e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = e^{-2}, e^{-\frac{1}{2}}$$

(ii)

$f'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{4\log x}{x} + \frac{5}{x}\right)x - \{2(\log x)^2 + 5\log x + 2\} \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{-2(\log x)^2 - \log x + 3}{x^2} \\ &= \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2}$$

(iii)

$f'(x) \geq 0$ を解くと

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(1 - \log x)(3 + 2\log x)}{x^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \log x)(3 + 2\log x) &\geq 0 \quad (\because x^2 \geq 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq \log x \leq 1 \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}} &\leq x \leq e \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad e^{-\frac{3}{2}} \leq x \leq e$$

(iv)

(ii), (iii) より, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって

$$\begin{aligned} \text{極大値: } f(e) &= \frac{2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 2}{e} = \frac{9}{e} \\ \text{極小値: } f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) &= \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{3}{2}\right) + 2}{e^{-\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{15}{2} + 2}{e^{-\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{e^{-\frac{3}{2}}} = -e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{極大値: } \frac{9}{e}, \text{ 極小値: } -e^{\frac{3}{2}}$$

(v)

(i), (iii), (iv) より

$$a = e^{-\frac{1}{2}}, b = e$$

である。また

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} dx \\ &= 2 \int_a^b \frac{(\log x)^2}{x} dx + 5 \int_a^b \frac{\log x}{x} dx + 2 \int_a^b \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \left[(\log x)^3 \right]_a^b - 2 \int_a^b \frac{(\log x)^2}{x} dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b \frac{(\log x)^2}{x} dx &= \frac{1}{3} \left[(\log x)^3 \right]_a^b \end{aligned}$$

となるから,

$$\int_a^b \frac{(\log x)^2}{x} dx = \frac{1}{3} \left\{ 1^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \right\} = \frac{3}{8}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\log x}{x} dx &= \left[(\log x)^2 \right]_a^b - \int_a^b \frac{\log x}{x} dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b \frac{\log x}{x} dx &= \frac{1}{2} \left[(\log x)^2 \right]_a^b \end{aligned}$$

となるから,

$$\int_a^b \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right\} = \frac{3}{8}$$

となる。また

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_a^b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

となるから, 求める値は

$$\int_a^b f(x) dx = 2 \cdot \frac{3}{8} + 5 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = e^{-\frac{1}{2}}, b = e, \int_a^b f(x) dx = \frac{45}{8}$$

(vi)

$e^{-\frac{3}{2}} \leq x \leq e$ における $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と定め, $y = f(x)$ とおくと

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

である。よって

$$\begin{aligned} 0 &= f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} = g(0) (= a) \\ B &= f(e) \Leftrightarrow e = g(B) (= b) \end{aligned}$$

となる。また $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dy = f'(x) dx$ であるから, 求める値は

$$\begin{aligned} \int_0^B g(x) dx &= \int_0^B g(y) dy \\ &= \int_a^b x f'(x) dx \\ &= \left[x f(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x) dx \\ &= b f(b) - a f(a) - \frac{45}{8} \\ &= e \cdot \frac{9}{e} - 0 - \frac{45}{8} \\ &= \frac{27}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^B g(x) dx = \frac{27}{8}$$