

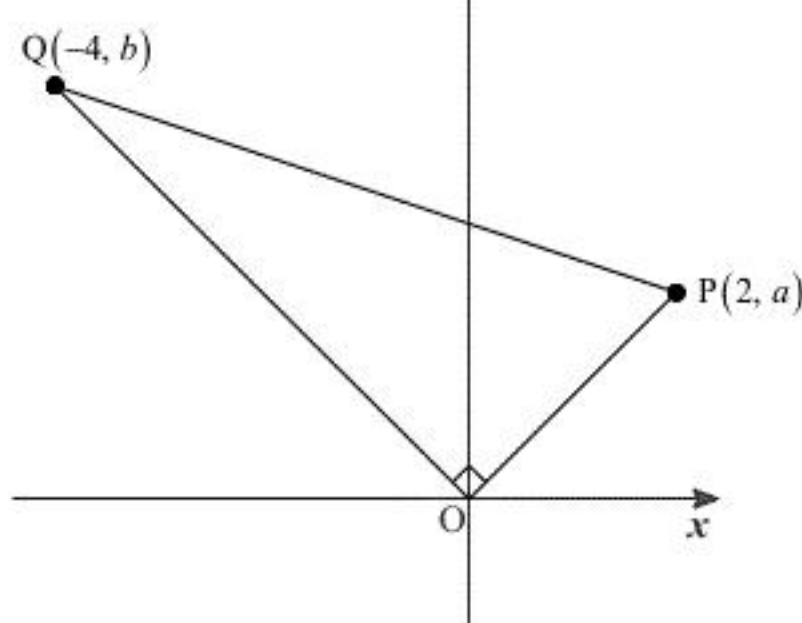
【1】

【解答】

|        |                                 |                              |
|--------|---------------------------------|------------------------------|
| (i)    | <div>ア</div>                    | <div>イ</div>                 |
|        | 2                               | 4                            |
| (ii)   | <div>ウ</div>                    |                              |
|        | 3                               |                              |
| (iii)  | <div>エ</div>                    |                              |
|        | $\frac{3}{8}\sqrt{6}$           |                              |
|        |                                 |                              |
| (iv)   | <div>オ</div>                    |                              |
|        | $-\frac{9}{4}$                  |                              |
| (v)    | <div>カ</div>                    |                              |
|        | $\left(-\frac{5}{2}, 13\right)$ |                              |
| (vi)   | <div>キ</div>                    |                              |
|        | 19                              |                              |
| (vii)  | <div>ク</div>                    |                              |
|        | $\frac{5}{36}$                  |                              |
| (viii) | <div>ケ</div>                    | <div>コ</div> <div>サ</div>    |
|        | $\frac{1}{2}$                   | $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{4}$ |

【解説】

(i) 三角形 OPQ を図示すると下図のようになる。



ベクトル  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$  が直交するので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &\perp \overrightarrow{OQ} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \left( \because \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \neq \vec{0} \right) \\ \Leftrightarrow (2, a) \cdot (-4, b) &= 0 \\ \Leftrightarrow -8 + ab &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{8}{a} \left( \because a > 0 \right)\end{aligned}$$

となる。また、三角形 OPQ の面積は 8 であるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 8 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + a^2} \sqrt{(-4)^2 + b^2} &= 8 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 4} \sqrt{b^2 + 16} &= 16 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 4)(b^2 + 16) &= 16^2 \left( \because a^2 + 4, b^2 + 16 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow (a^2 + 4) \left( \frac{8^2}{a^2} + 16 \right) &= 16^2 \left( \because b = \frac{8}{a} \right) \\ \Leftrightarrow a^4 - 8a^2 + 16 &= 0 \left( \because a^2 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow (a^2 - 4)^2 &= 0 \\ \therefore a &= 2 \left( \because a > 0 \right) \\ \therefore b &= 4 \left( \because b = \frac{8}{a} \right)\end{aligned}$$

となる。

(ii) 真数条件より、 $x > -1$  である。よって、

$$\begin{aligned}\log_4 (x + 13) &= \log_2 (x + 1) \\ \Leftrightarrow \frac{\log_2 (x + 13)}{\log_2 4} &= \log_2 (x + 1) \\ \Leftrightarrow x + 13 &= (x + 1)^2 \left( \because x > -1 \right) \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) &= 0 \\ \therefore x &= 3 \left( \because x > -1 \right)\end{aligned}$$

となる。

(iii)  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$

の両辺の 2 乗をとると、

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3}{8} \sqrt{6}\end{aligned}$$

である。

(iv)  $y = x^3 - 3x$

を微分すると、

$$y' = 3x^2 - 3$$

となる。したがって、 $x = t$  ( $t$  は実数) における  $y = x^3 - 3x$  の接線の方程式は、

$$y = (3t^2 - 3)(x - t) + t^3 - 3t$$

である。この接線が  $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$  を通るとき、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4} &= (3t^2 - 3)(0 - t) + t^3 - 3t \\ \Leftrightarrow t^3 &= \frac{1}{8} \\ \therefore t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるので、接線の傾きは、

$$3 \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 3 = -\frac{9}{4}$$

である。

(v)  $y = -4x^2 + 12x + 3$   
 $= -4 \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + 12$

となるので、もとの放物線の頂点の座標は  $\left(\frac{3}{2}, 12\right)$  である。したがって、平行移動して得られる放物線の頂点の座標は、

$$\left( \frac{3}{2} - 4, 12 + 1 \right) = \left( -\frac{5}{2}, 13 \right)$$

である。

(vi) 対称性より  $x \geq y$  としてよい。データの平均値が 20 であるので、

$$\frac{12 + 18 + 20 + x + y + 35}{6} = 20$$

$$\Leftrightarrow x + y = 35$$

となる。また、データの最頻値が 20 だけであるので、 $x, y$  の少なくとも一方は 20 である。したがって、 $x \geq y$  と  $x + y = 35$  より、

$$x = 20, y = 15$$

となる。これはデータの最頻値が 20 だけであることを満たす。このとき、データを小さい順に並び替えると、

$$12, 15, 18, 20, 20, 35$$

であるので、中央値は

$$\frac{18 + 20}{2} = 19$$

となる。

(vii) さいころの目の出る確率はすべて  $\frac{1}{6}$  で同様に確からしい。「1 の目が少なくとも 1 回出て、かつ 5 の目も少なくとも 1 回出る」事象の余事象は、「1 の目が 1 回も出ない、または 5 の目が 1 回も出ない」事象である。ここで、「1 の目が 1 回も出ない」確率、および「5 の目が 1 回も出ない」確率は、いずれも

$$\left( \frac{5}{6} \right)^3 = \frac{125}{216}$$

であり、「1 の目が 1 回も出ず、かつ 5 の目が 1 回も出ない」確率は、

$$\left( \frac{4}{6} \right)^3 = \frac{64}{216}$$

となる。したがって、「1 の目が 1 回も出ない、または 5 の目が 1 回も出ない」確率は、

$$\frac{125}{216} + \frac{125}{216} - \frac{64}{216} = \frac{31}{36}$$

である。以上より、求める確率は、

$$1 - \frac{31}{36} = \frac{5}{36}$$

となる。

(viii)  $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x+1)}$

の両辺に  $(x-1)^2(x+1)$  をかけると、

$$\begin{aligned}x &= a(x+1) + b(x-1)(x+1) + c(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow (b+c)x^2 + (a-2c-1)x + (a-b+c) &= 0\end{aligned}$$

となる。この式が  $x = \pm 1$  を除くすべての  $x$  についての恒等式となるので、

$$\begin{aligned}\begin{cases} b+c=0 \\ a-2c-1=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ a-2c-1=0 \\ a+2c=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2}a \end{cases} \\ \therefore a &= \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}, c = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。



## II

(i)

$$\begin{aligned} 3 \int_0^x f_n(t) dt &= 3 \int_0^x (a_n t^2 + b_n t + 1) dt \\ &= 3 \left[ \frac{1}{3} a_n t^3 + \frac{1}{2} b_n t^2 + t \right]_0^x \\ &= a_n x^3 + \frac{3}{2} b_n x^2 + 3x \end{aligned}$$

であるので、

$$3 \int_0^x f_n(t) dt = p_n x^3 + q_n x^2 + r_n x + s_n$$

と係数を比較して、

$$\begin{cases} p_n = a_n \\ q_n = \frac{3}{2} b_n \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = a_n, q_n = \frac{3}{2} b_n$$

(ii)

(i)より、

$$3 \int_0^x f_n(t) dt = a_n x^3 + \frac{3}{2} b_n x^2 + 3x$$

であるので、すべての自然数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 3 \int_0^x f_n(t) dt - (x+c) f_n(x) \\ &\Leftrightarrow a_{n+1} x^2 + b_{n+1} x + 1 = a_n x^3 + \frac{3}{2} b_n x^2 + 3x - (x+c)(a_n x^2 + b_n x + 1) \\ &\Leftrightarrow \left( a_{n+1} + c a_n - \frac{1}{2} b_n \right) x^2 + (b_{n+1} + c b_n - 2) x + (c+1) = 0 \end{aligned}$$

が  $x$  についての恒等式となるとき、

$$\begin{cases} a_{n+1} + c a_n - \frac{1}{2} b_n = 0 \\ b_{n+1} + c b_n - 2 = 0 \\ c + 1 = 0 \end{cases} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。したがって特に、 $c = -1$  である。

$$(\text{答}) \quad c = -1$$

(iii)

①より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} + c b_n - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + 2 \quad (\because c = -1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} = b_n + 2$$

(iv)

$b_1 = 1$  であるので、(iii)より、数列  $\{b_n\}$  は初項1、公差2の等差数列である。したがって、数列  $\{b_n\}$  の一般項は、

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + 2(n-1) \\ \Leftrightarrow b_n &= 2n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2n - 1$$

(v)

①と(iv)より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} + c a_n - \frac{1}{2} b_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2} (2n - 1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $n \geq 2$  において数列  $\{a_n\}$  の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ \Leftrightarrow a_n &= 3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1) \\ &= 3 + \frac{1}{2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) - (n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (n^2 - 2n + 7) \end{aligned}$$

である。また、 $n=1$  としたとき  $\frac{1}{2} (1^2 - 2 \cdot 1 + 7) = 3 = a_1$  より、 $n=1$  でも成立する。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2} (n^2 - 2n + 7)$$

### Ⅲ

(i)

$X$ に属する数の中で、2で割り切れないものの和は

$$\begin{aligned}1+3+\cdots+99 &= \sum_{k=1}^{50}(2k-1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 - 50 \\ &= 2500\end{aligned}$$

である。

(答) 2500

(ii)

$X$ に属する数の中で、3で割り切れるものの和は

$$\begin{aligned}3+6+\cdots+99 &= \sum_{k=1}^{33}3k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 34 \\ &= 1683\end{aligned}$$

である。

(答) 1683

(iii)

$X$ に属する数の中で、「3で割り切れ、かつ2で割り切れるものの和」は、「6で割り切れるものの和」であり、

$$\begin{aligned}6+12+\cdots+96 &= \sum_{k=1}^{16}6k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 17 \\ &= 816\end{aligned}$$

となる。求める和は、 $X$ に属する数の中で、「3で割り切れるものの和」から「3で割り切れ、かつ2で割り切れるものの和」を引いたものなので、(ii)より、

$$1683-816=867$$

である。

(答) 867

(iv)

$X$ に属する数の中で、2で割り切れるものの和は、

$$\begin{aligned}2+4+\cdots+100 &= \sum_{k=1}^{50}2k \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 \\ &= 2550\end{aligned}$$

である。したがって、 $X$ に属する数の中で、2または3で割り切れるものの和は、

$$\begin{aligned}&(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、2で割り切れるものの和}) \\ &+(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、3で割り切れるものの和}) \\ &-(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、2で割り切れ、かつ3で割り切れるものの和}) \\ &= 2550+1683-816 \\ &= 3417\end{aligned}$$

となる。

(答) 3417

(v)

$X$ に属する数の中で、5で割り切れるものの和は、

$$\begin{aligned}5+10+\cdots+100 &= \sum_{k=1}^{20}5k \\ &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \\ &= 1050\end{aligned}$$

である。また、(iii)と同様にして、 $X$ に属する数の中で、「2で割り切れ、かつ5で割り切れるものの和」、「3で割り切れ、かつ5で割り切れるものの和」、「2で割り切れ、かつ3で割り切れ、かつ5で割り切れるものの和」はそれぞれ、

$$\begin{aligned}10+20+\cdots+100 &= \sum_{k=1}^{10}10k \\ &= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 \\ &= 550 \\ 15+30+\cdots+90 &= \sum_{k=1}^615k \\ &= 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \\ &= 315 \\ 30+60+90 &= 180\end{aligned}$$

となる。したがって、 $X$ に属する数の中で、2, 3, 5の少なくとも1つで割り切れるものの和は、

$$\begin{aligned}&(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、2で割り切れるものの和}) \\ &+(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、3で割り切れるものの和}) \\ &+(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、5で割り切れるものの和}) \\ &-(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、6で割り切れるものの和}) \\ &-(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、10で割り切れるものの和}) \\ &-(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、15で割り切れるものの和}) \\ &+(\mathcal{X} \text{に属する数の中で、30で割り切れるものの和}) \\ &= 2550+1683+1050-816-550-315+180 \\ &= 3782\end{aligned}$$

となる。

(答) 3782