

I

【解答】

(i)	ア	イ
	−2	3
(ii)	ウ	
	−17	
(iii)	エ	オ
	2	$\frac{3}{2}$
(iv)	カ	
	$n^2 + n$	
(v)	キ	
	$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$	
(vi)	ク	
	$-\frac{7}{16}$	
(vii)	ケ	
	6300	
(viii)	コ	
	144	

【解説】

(i)

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(3x-1)^2}=|x+2|+|3x-1|$$

と変形できる。ここで、 $-2 < x < \frac{1}{3}$ であるから、

$$\begin{cases} 0 < x+2 < \frac{7}{3} \\ -7 < 3x-1 < 0 \end{cases}$$

となる。よって、 $-2 < x < \frac{1}{3}$ の範囲においては

$$|x+2|+|3x-1|=x+2-(3x-1)=-2x+3$$

となるため、 $a=-2$ 、 $b=3$ である。

(ii)

2 直線 $3x+y=1$ と $x+2y=7$ の交点は点 $(-1, 4)$ であるから、直線 $kx-5y=-3$ が点 $(-1, 4)$ を通る条件を考える。代入すると、

$$\begin{aligned} -k-5\cdot 4 &= -3 \\ \therefore k &= -17 \end{aligned}$$

となる。

(iii)

点 C が 3 点 O, A, B の定める平面上にあることから、 $\overline{OC}=p\overline{OA}+q\overline{OB}$ となる実数 p, q が存在する。点 C の座標は $(a, b, 1)$ であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p\cdot 1+q\cdot 0=a \\ p\cdot 0+q\cdot 1=b \\ p\cdot (-1)+q\cdot 2=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=p \\ b=q \\ -p+2q=1 \end{cases} \end{aligned}$$

である。また、 $OC=AC$ 、すなわち $|\overline{OC}|^2=|\overline{AC}|^2$ であるから、

$$\begin{aligned} a^2+b^2+1^2 &= (a-1)^2+b^2+(1+1)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= -2a+1+4 \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

である。よって、 $-a+2b=1$ より、 $b=\frac{3}{2}$ となる。

(iv)

$$T_n=\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n (a_k+2)=\sum_{k=1}^n a_k+\sum_{k=1}^n 2=\sum_{k=1}^n a_k+2n$$

である。ここで、 $\sum_{k=1}^n a_k=S_n=n^2-n$ であるから、

$$T_n=n^2-n+2n=n^2+n$$

となる。

(v)

$f(x)$ は実数係数の整式であるから、ある整式 $P(x)$ と実数 e, f を用いて

$$f(x)=(x^2-2x+5)P(x)+ex+f$$

と表せる。ここで、 $f(1+2i)=2+3i$ であり、 $1+2i$ は 2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ の解であるから、

$$\begin{aligned} &e(1+2i)+f=2+3i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e+f=2 \\ 2e=3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e=\frac{3}{2} \\ f=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となり、 $f(x)$ を x^2-2x+5 で割った余りは $\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ となる。

(vi)

2 倍角の公式より、 $\sin 2\theta=2\sin \theta\cos \theta$ であるから、 $\sin \theta+\cos \theta=\frac{3}{4}$ より、

$$\begin{aligned} &(\sin \theta+\cos \theta)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \theta+\cos^2 \theta+2\sin \theta\cos \theta=\frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow 1+\sin 2\theta=\frac{9}{16} \\ &\therefore \sin 2\theta=-\frac{7}{16} \end{aligned}$$

となる。

(vii)

10 人の中から 2 人もしくは 3 人を選び順にグループに追加していくと考え、2 人のグループ 2 つと 3 人のグループ 2 つの区別がつかないことを考慮して、

$$_{10}C_2\cdot _8C_2\cdot \frac{1}{2!}\cdot _6C_3\cdot _3C_3\cdot \frac{1}{2!}=6300 \text{ (通り)}$$

となる。

(viii)

27^{100} の桁数を n とおくと、

$$10^{n-1}\leq 27^{100}<10^n$$

となる。 n は正の整数であり、各辺は 0 より大きいため、各辺の常用対数をとっても大小関係は変わらず、

$$\begin{aligned} &\log_{10} 10^{n-1}\leq \log_{10} 27^{100}<\log_{10} 10^n \\ &\Leftrightarrow n-1\leq 300\log_{10} 3<n \\ &\Leftrightarrow n-1\leq 300\cdot 0.4771<n \text{ (}\because \log_{10} 3=0.4771\text{)} \\ &\Leftrightarrow n-1\leq 143.13<n \end{aligned}$$

となる。これを満たすのは $n=144$ のときであり、 27^{100} は 144 桁の自然数である。

II

(i)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

であるため、

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c$$

$$f'(2) = 12 + 4a + b$$

である。よって、

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ 12 + 4a + b = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -4a - 2b - 8 \\ b = -4a - 9 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} b = -4a - 9 \\ c = 4a + 10 \end{cases}$$

となる。

(答) $b = -4a - 9, c = 4a + 10$

(ii)

$f(x)$ が極大値を持つのは、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つときである。よって、 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると、 $D > 0$ であるから、

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3 \cdot (-4a - 9) > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 12a + 27 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)(a + 9) > 0$$

$$\therefore a < -9, -3 < a$$

となる。

(答) $a < -9, -3 < a$

(iii)

$f(1) = 1$ より、

$$1 + a + b + c = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + a + (-4a - 9) + 4a + 10 = 1$$

$$\therefore a = -1$$

となる。

(答) $a = -1$

(iv)

(i) と (iii) より、 $f(1) = 1$ のとき $b = -5, c = 6$ である。よって、

$$f(-2) = -8 + (-1) \cdot 4 + (-5) \cdot (-2) + 6 = 4$$

$$f(4) = 64 + (-1) \cdot 16 + (-5) \cdot 4 + 6 = 34$$

となる。

(答) $f(-2) = 4, f(4) = 34$

(v)

$f(1) = 1$ のとき、 $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ となり

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$$

$$= (3x - 5)(x + 1)$$

である。よって、 $-2 \leq x \leq 4$ における $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	-2	...	-1	...	$\frac{5}{3}$	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	4	↗	9	↘	$-\frac{13}{27}$	↗	34

よって、 $x = 4$ で最大値 34、 $x = \frac{5}{3}$ で最小値 $-\frac{13}{27}$ をとる。

(答) $x = 4$ で最大値 34、 $x = \frac{5}{3}$ で最小値 $-\frac{13}{27}$

Ⅲ

(i)

三角形 ABC において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \alpha} &= 2R \\ \Leftrightarrow 50 \cdot \frac{13}{5} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= 65\end{aligned}$$

となる。

(答) $R = 65$

(ii)

$0^\circ < \beta < 180^\circ$ かつ $\cos \beta < 0$ であるから、 $90^\circ < \beta < 180^\circ$ である。したがって、 $\angle C$ の大きさを γ とおくと

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) < 180^\circ - (90^\circ + 0^\circ) = 90^\circ$$

より $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ であるから、 $\cos \alpha > 0$ である。よって、

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

となる。

(答) $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

(iii)

$90^\circ < \beta < 180^\circ$ より $\sin \beta > 0$ であるから

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

である。したがって、三角形 ABC において正弦定理より

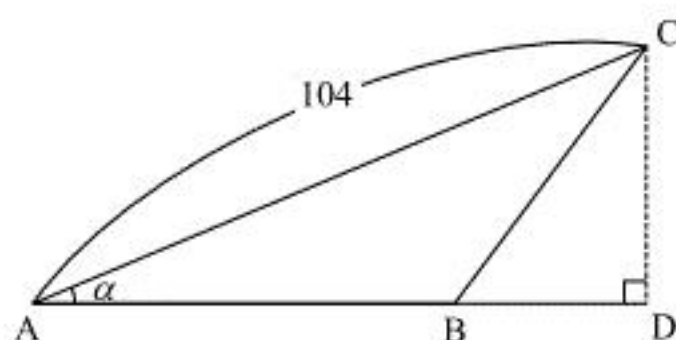
$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin \beta} &= \frac{BC}{\sin \alpha} \\ \Leftrightarrow AC \cdot \frac{5}{4} &= 50 \cdot \frac{13}{5} \\ \Leftrightarrow AC &= 104\end{aligned}$$

となる。

(答) $AC = 104$

(iv)

三角形 ABC および点 D は以下のように図示できる。



上図より、直角三角形 ADC において

$$AD = AC \cos \alpha = 104 \cdot \frac{12}{13} = 96$$

となる。

(答) $AD = 96$

(v)

$AB = x$ ($x > 0$) とおく。三角形 ABC において余弦定理より

$$\begin{aligned}104^2 &= 50^2 + x^2 - 2 \cdot 50 \cdot x \cdot \cos \beta \\ \Leftrightarrow 10816 &= 2500 + x^2 - 2 \cdot 50 \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\ \Leftrightarrow x^2 + 60x - 8316 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 66)(x + 126) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 66, -126\end{aligned}$$

となり、このうち $x > 0$ を満たすのは $x = 66$ である。よって、求める解は $AB = 66$ である。

(答) $AB = 66$