

【解答】

(i)	ア	イ
	3	6
(ii)	ウ	エ
	16	$\frac{1}{4}$
(iii)	オ	
	$(2, 4), (3, 12)$	
(iv)	カ	
	609	
(v)	キ	
	$\frac{7}{27}$	
(vi)	ク	
	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	
(vii)	ケ	
	$\frac{9}{5}$	
(viii)	コ	
	$\left(\frac{3}{2}, -4\right), (-1, 1)$	

【解説】

(i)

$$f(x)=ax^2-x^3 \text{ について,}$$

$$f'(x)=2ax-3x^2$$

$$=-3x\left(x-\frac{2a}{3}\right)$$

であり、 $a>0$ より増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	$\frac{2a}{3}$	...
f'	-	0	+	0	-
f		極小		極大	

したがって、 $f(x)$ の極大値 M について、

$$M=f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3$$

となるから、

$$4\leq M\leq 32$$

$$\Leftrightarrow 4\leq \frac{4}{27}a^3\leq 32$$

$$\Leftrightarrow 27\leq a^3\leq 216$$

$$\Leftrightarrow 3\leq a\leq 6$$

を得る。

(ii)

初項が a 、公比が r の等比数列の第2項は ar と書けるから、 $ar=4$ が成り立つ。また、初項から第3項までの和が21であることから、 $a+ar+ar^2=21$ が成り立つ。これらを連立し、 $r\neq 0$ を踏まえて解くと

$$\begin{cases} ar=4 \\ a+ar+ar^2=21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar=4 \\ \frac{4}{r}+4r=17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar=4 \\ 4r^2-17r+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ar=4 \\ \left(r-\frac{1}{4}\right)(r-4)=0 \end{cases}$$

$$\therefore r=\frac{1}{4}, a=16 \text{ (}\because r<1\text{)}$$

となる。

(iii)

自然数 x, y のもとで、

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow xy+4x-4y=0$$

$$\Leftrightarrow (4-x)(y+4)=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。ここで、 x, y は自然数だから、 $y+4>0$ より、

$$4-x>0$$

$$\therefore x=1, 2, 3$$

が必要となる。ここで x の値で場合分けをする。

[1] $x=1$ のとき

$$\textcircled{1}\text{式に代入すると}y+4=\frac{16}{3}\text{となるが、}y\text{は自然数であるから不適である。}$$

[2] $x=2$ のとき

$$\textcircled{1}\text{式に代入すると}y+4=8\Leftrightarrow y=4\text{となる。}$$

[3] $x=3$ のとき

$$\textcircled{1}\text{式に代入すると}y+4=16\Leftrightarrow y=12\text{となる。}$$

以上、[1], [2], [3]より、 $(x, y)=(2, 4), (3, 12)$ となる。

(iv)

2^{-2020} の小數第 n 位に初めて0でない数字が現れるとすると、

$$10^{-n}\leq 2^{-2020}<10^{-n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。式②について常用対数をとると、 $\log_{10}2=0.3010$ より、

$$-n\leq -2020\log_{10}2<-n+1$$

$$\Leftrightarrow -n\leq -608.02<-n+1$$

$$\Leftrightarrow 608.02\leq n<609.02$$

$$\therefore n=609$$

となる。

(v)

1個のさいころを3回投げて2以下の目が2回以上出る確率は、2以下の目が3回出る確率と2以下の目が2回出る確率の和である。以下、この2つの場合について場合分けを行う。

[1] 2以下の目が3回出る確率

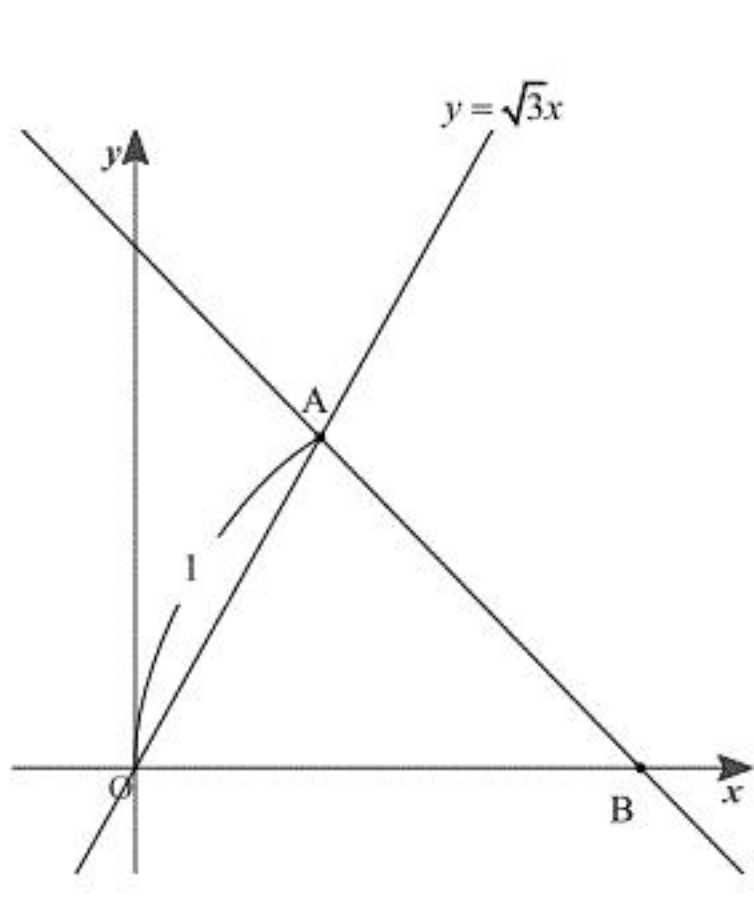
$$\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{1}{27}\text{である。}$$

[2] 2以下の目が2回出る確率

$${}_3\text{C}_1\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{9}\text{である。}$$

以上、[1], [2]より、求める確率は $\frac{1}{27}+\frac{2}{9}=\frac{7}{27}$ となる。

(vi)



点Aは第1象限にあり、直線 $y=\sqrt{3}x$ 上の点だから $(t, \sqrt{3}t)$ (ただし $t>0$)とおくことができる。

$$OA=\sqrt{t^2+(\sqrt{3}t)^2}=2t \text{ より } OA=1\Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ を得る。したがって、点Aは}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ である。よっ}$$

て、点Aを通り傾きが -1 の直線の方程式は

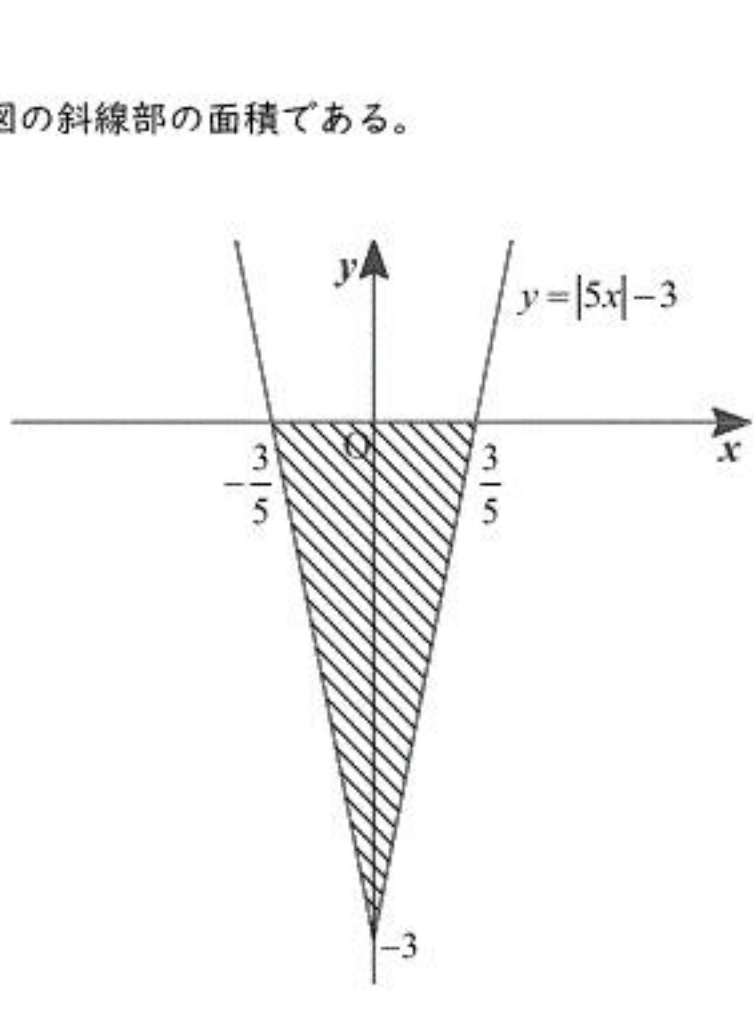
$$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=-x+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

となる。これと $y=0$ と連立させると $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ となるから、点Bの座標は $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ となる。

(vii)

求める面積は以下の図の斜線部の面積である。



上図より求める面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot 3=\frac{9}{5}$ となる。

(viii)

$x^2+(a+1)x+b-2=0$ が a, b を解に持つとき、解と係数の関係より

$$a+b=-(a+1), ab=b-2$$

が成り立つ。これらを連立すると

$$\begin{cases} a+b=-(a+1) \\ ab=b-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-1 \\ a(-2a-1)=(-2a-1)-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-1 \\ \left(a-\frac{3}{2}\right)(a+1)=0 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b)=\left(\frac{3}{2}, -4\right), (-1, 1)$$

となる。

II

(i)

放物線 C について、 $y = x^2 - 1$ より $y' = 2x$ であるから、直線 m_1 は点 $A(\alpha, \alpha^2 - 1)$ を通り傾き

2α の直線である。よって、その方程式は

$$y - (\alpha^2 - 1) = 2\alpha(x - \alpha)$$

$$\therefore y = 2\alpha x - \alpha^2 - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2\alpha x - \alpha^2 - 1$$

(ii)

α, β は放物線 $y = x^2 - 1$ と直線 $y = kx$ の交点の x 座標であるから、 x についての 2 次方程式

$x^2 - 1 = kx \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0$ の解である。したがって、解と係数の関係より $\alpha + \beta = k$ を得る。

$$(\text{答}) \quad \alpha + \beta = k$$

(iii)

(i) と同様に、直線 m_2 の方程式は $y = 2\beta x - \beta^2 - 1$ となる。点 Q は直線 m_1 と直線 m_2 の交点だから、それぞれの方程式を連立して、 $\alpha \neq \beta$ より、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 - 1 \\ y = 2\beta x - \beta^2 - 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 - 1 \\ (\alpha - \beta)\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha\beta - 1 \\ x = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。解と係数の関係より得られる式 $\alpha + \beta = k, \alpha\beta = -1$ を代入すると、点 Q の座標は

$\left(\frac{k}{2}, -2\right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad Q\left(\frac{k}{2}, -2\right)$$

(iv)

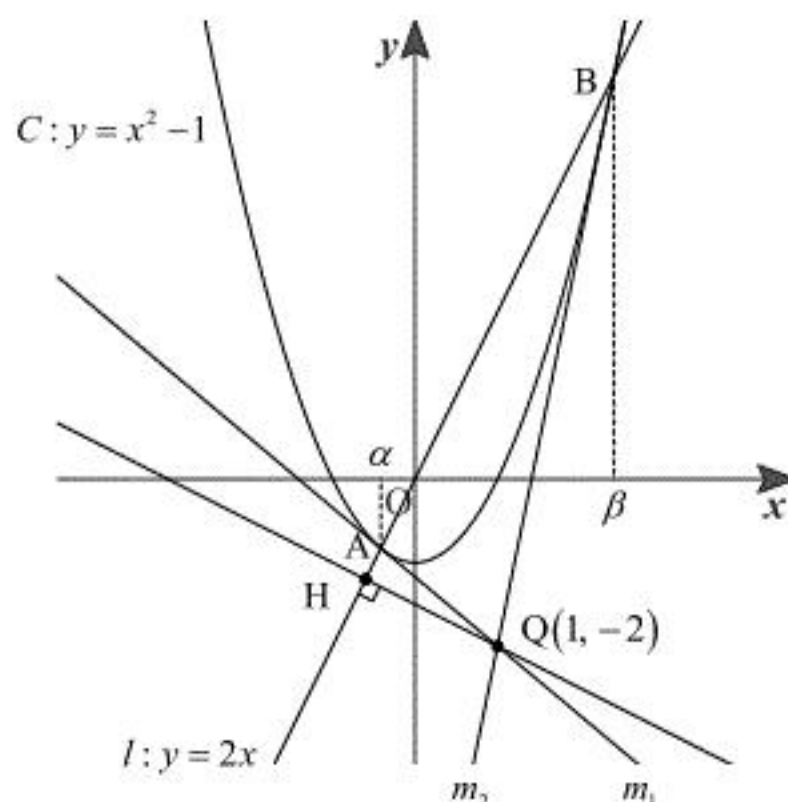
(iii) の結果より、 k が $2 \leq k \leq 5$ の範囲を動くとき、点 Q の軌跡は点 $(1, -2)$ と点 $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$ を結

んだ線分になる。したがって、 $L = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad L = \frac{3}{2}$$

(v)

問題文の状況を図示すると以下の通りになる。



ここで、直線 l の傾きは 2 だから、点 $Q(1, -2)$ を通り直線 l と垂直に交わる直線の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、その方程式は

$$y - (-2) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

である。したがって、 $y = 2x, y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ を連立させて、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \\ & \therefore (x, y) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

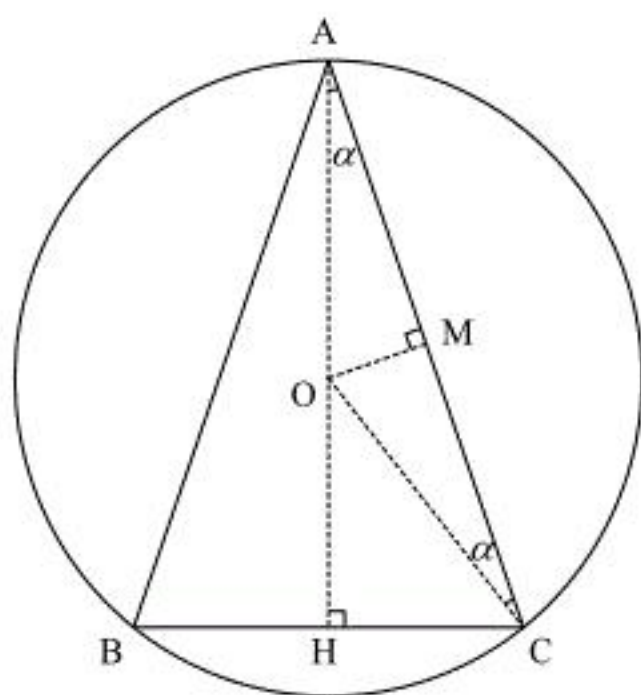
となる。

$$(\text{答}) \quad H\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

Ⅲ

(i)

△ABCとその外接円（中心を点Oとおく。）を図示すると以下の通りになる。また、点H, Mを図の様に点Oから辺に下ろした垂線の足とする。



AB=AC から、AHは∠CABを二等分するため、∠OAC=αとなる。また、OA=OCより、△OACは二等辺三角形となるから、AC=2AMである。したがって、

$$\begin{aligned} AC &= 2AM \\ &= 2OA \cos \angle OAC \\ &= 2\cos \alpha \end{aligned}$$

となる。

(答) $AC = 2\cos \alpha$

(ii)

(i)の結果より、

$$\begin{aligned} CH &= AC \sin \angle OAC \\ &= 2\sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

となる。AB=ACより、BC=2CHであるから、

$$\begin{aligned} l &= AB + AC + BC \\ &= 2\cos \alpha + 2\cos \alpha + 2 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha \\ &= 4\cos \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

となる。

(答) $l = 4\cos \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha$

(iii)

AH=ACcos∠OAC=2cos²αより、

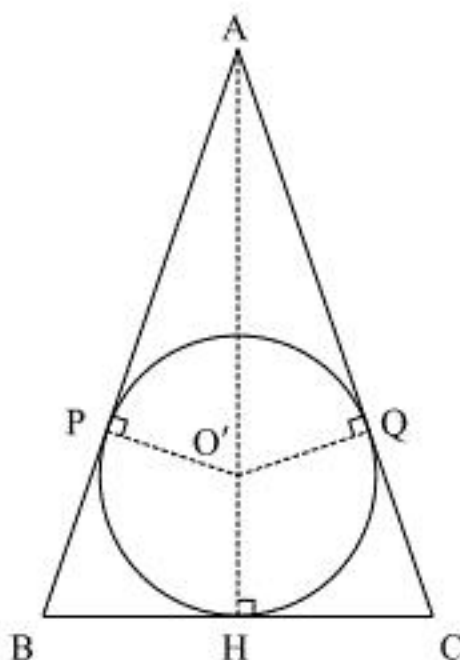
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\sin \alpha \cos \alpha \cdot 2\cos^2 \alpha \\ &= 4\sin \alpha \cos^3 \alpha \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = 4\sin \alpha \cos^3 \alpha$

(iv)

△ABCの内接円の中心を点O'とおき、下图の様に点P, Qを定める。



内接円の定義よりO'P=O'Q=O'H=rが成り立つことを踏まえると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot O'P + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot O'Q + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot O'H \\ &= \frac{1}{2} (AB + BC + CA) r \\ &= \frac{1}{2} l r \end{aligned}$$

となるから、 $r = \frac{2S}{l}$ と表すことができる。

(答) $r = \frac{2S}{l}$

(v)

$r = \frac{2S}{l}$ に $l = 4\cos \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha$, $S = 4\sin \alpha \cos^3 \alpha$ を代入すると、

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \cdot 4\sin \alpha \cos^3 \alpha}{4\cos \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{2\sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= \frac{2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{1 + \sin \alpha} \\ &= 2\sin \alpha (1 - \sin \alpha) \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = 2\sin \alpha (1 - \sin \alpha)$