

2020年度

K_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キには、あてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入し、また、空欄ク、ケには(v)にある選択肢1～4の中から最も適切な番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) t を実数とする。平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ をみたすとき、 $|t\vec{a} + (1-t)\vec{b}|$ は $t =$ ア のとき最小値 イ をとる。

(ii) 三角形ABCにおいて、 $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるとき、 $\sin C =$ ウ である。

(iii) 等比数列 $\{a_n\}$ について、 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 3$, $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 2$ が成り立つとする。このとき、 $\{a_n\}$ の公比は エ, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ の値は オ である。

(iv) 方程式 $37x + 15y = 1$ の整数解 x, y について、 x を15で割った余りは カ であり、 y を37で割った余りは キ である。

(v) a を正の実数とし、 x, y を実数とする。 x, y に関する条件 A, B を次で定める。

$$A : |x| + |y| \leq a$$

$$B : |x| \leq 1 \text{ かつ } |y| \leq 1$$

$a = 1$ のとき、 A は B であるための ク。 $a = 2$ のとき、 A は B であるための ケ。

1. 必要条件であるが、十分条件でない
2. 十分条件であるが、必要条件でない
3. 必要十分条件である
4. 必要条件でも十分条件でもない

Ⅱ. O を原点とする座標平面上を移動する点 P がある。はじめに P は O にあり、1 枚の硬貨を投げるたびに次のルールにしたがって P が移動する。ただし、硬貨を投げたときに表が出る確率と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする。

[ルール] :

- 硬貨を投げて表が出たら x 軸の正の方向に 1 移動する。
- 硬貨を投げて裏が出たら y 軸の正の方向に 1 移動する。

n を自然数とする。硬貨を n 回投げた後の P の位置を P_n とする。また、 P_n が直線 $y = x$ 上にある確率を q_n とする。このとき、次の問 (i) ~ (vi) に答えよ。解答は解答用紙の所定欄に答えのみを記入すること。

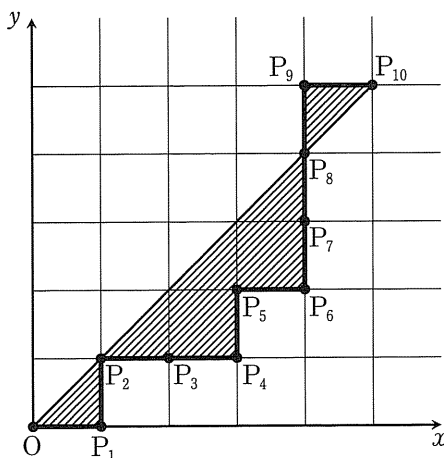
(i) q_1, q_2, q_3, q_4 を求めよ。

(ii) q_{2n-1} を求めよ。

(iii) q_{2n} を n を用いて表せ。

(iv) P_{2n} が直線 $y = x$ 上にあるとする。 $O, P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ を順に結んでできる折れ線と、直線 $y = x$ とで囲まれた図形の面積を S_{2n} とする。 S_{2n} は $P_1, \dots, P_{2n-1}$ の位置によって定まる。例えば $n = 5$ で、点 P が下図のように移動した場合、囲まれた図形とは図の斜線部分である。

このとき、 S_{2n} の取り得る値の最大値 M と最小値 m をそれぞれ n を用いて表せ。



(v) M を (iv) で求めた最大値とする。 P_{2n} が直線 $y = x$ 上にあり、かつ $S_{2n} = M$ である確率を n を用いて表せ。

(vi) m を (iv) で求めた最小値とする。 P_{2n} が直線 $y = x$ 上にあり、かつ $S_{2n} = m$ である確率を n を用いて表せ。

Ⅲ. 関数

$$f(x) = \frac{2(\log x)^2 + 5\log x + 2}{x} \quad (x > 0)$$

について、次の問(i)～(vi)に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) $f(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。

(ii) $f'(x)$ を求めよ。

(iii) $f'(x) \geq 0$ となる x の値の範囲を求めよ。

(iv) $f(x)$ の極大値と極小値をそれぞれ求めよ。

(v) (iii)で求めた x の値の範囲において、 $f(x) = 0$ となる x の値を a とおく。また、 $f(x)$ が極大値をとる x の値を b とおく。このとき、 a と b の値を求め、

$$\int_a^b f(x) dx$$

の値を求めよ。

(vi) $f(x)$ の極大値を B とおく。また、 $f(x)$ の定義域を(iii)で求めた範囲に制限した関数を考え、その逆関数を $g(x)$ とする。このとき、

$$\int_0^B g(x) dx$$

の値を求めよ。

IV. z を 0 でも 1 でもない複素数とし, i を虚数単位とする。0 を原点とする複素数平面上の 4 点 $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$, $D(iz^2)$ について, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) $AB = BC$ となるための, z についての必要十分条件を求めよ。さらに, その条件を満たす点 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ。
- (ii) $AB = AC$ となるための, z についての必要十分条件を求めよ。さらに, その条件を満たす点 z がえがく図形を複素数平面上に図示せよ。
- (iii) 3 点 A , B , C を頂点とする三角形が正三角形であるような, z の値をすべて求めよ。
- (iv) z を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と極形式で表す。ただし, $r > 0$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき, 三角形 OAB の面積 S および, 三角形 OAD の面積 T をそれぞれ r と θ を用いて表せ。
- (v) (iv) で求めた S と T について, $S = T$ となる θ の値を求めよ。

【以下余白】

