

I.

【解答】

(i)	$\boxed{\text{ア}}$	
	$3+2\sqrt{2}$	
(ii)	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$
	$\sqrt{65}$	$-\frac{5}{13}$
(iii)	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$
(iv)	$\boxed{\text{カ}}$	
	$\sqrt{2}$	
(v)	$\boxed{\text{キ}}$	
	$\frac{1}{32}$	
(vi)	$\boxed{\text{ク}}$	
	$\frac{67}{5}$	

【解説】

(i)

与式より

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right) &= x^2+2+1+\frac{2}{x^2} \\ &= x^2+\frac{2}{x^2}+3\end{aligned}$$

と変形できる。 $x>0$ において、 $x^2>0$, $\frac{2}{x^2}>0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係より

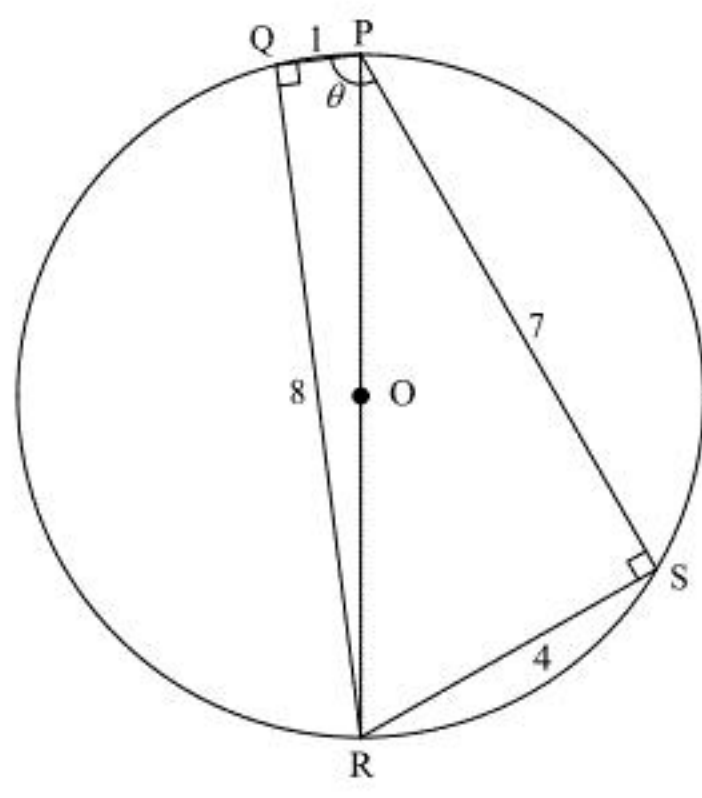
$$x^2+\frac{2}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{2}{x^2}}=2\sqrt{2}$$

が成り立つ。等号成立は

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{2}{x^2} \\ \Leftrightarrow x^4 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \sqrt{2} \left(\because x^2 > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt[4]{2} \left(\because x > 0 \right)\end{aligned}$$

のときである。よって、 $x>0$ において、 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)$ は $x=\sqrt[4]{2}$ のとき最小値 $3+2\sqrt{2}$ をとる。

(ii)



四角形PQRSの対角線PRは円Cの中心Oを通ることから円Cの直径である。ゆえに、

$\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ となるから、 $\triangle PQR$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{PQ^2+QR^2} \\ &= \sqrt{1^2+8^2} \\ &= \sqrt{65}\end{aligned}$$

となる。よって、円Cの直径は $\sqrt{65}$ である。次に、 $\triangle PQS$ に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}QS^2 &= PQ^2+SP^2-2\cdot PQ\cdot SP\cdot\cos\theta \\ &= 1^2+7^2-2\cdot 1\cdot 7\cdot\cos\theta \\ &= 50-14\cos\theta \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、四角形PQRSは円Cに内接するから

$$\begin{aligned}\angle QRS &= \pi - \angle QPS \\ &= \pi - \theta\end{aligned}$$

であり、 $\triangle QRS$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}QS^2 &= QR^2+RS^2-2\cdot QR\cdot RS\cdot\cos(\pi-\theta) \\ &= 8^2+4^2-2\cdot 8\cdot 4\cdot(-\cos\theta) \\ &= 80+64\cos\theta \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①、②から QS^2 を消去すると

$$\begin{aligned}50-14\cos\theta &= 80+64\cos\theta \\ \Leftrightarrow 78\cos\theta &= -30 \\ \therefore \cos\theta &= -\frac{5}{13}\end{aligned}$$

となる。

(iii)

3個のさいころを1回投げるとき、出た目がすべて3以下である場合の数は $3^3=27$ 通りであり、出た目がすべて2以下である場合の数は $2^3=8$ 通りである。出た目の最大値が3となる場合の数は出た目がすべて3以下である場合の数から出た目がすべて2以下である場合の数を引いたものであるから、 $27-8=19$ 通りである。すべての場合の数は $6^3=216$ 通りであり、これらは同様に確からしいから、3個のさいころを1回投げるとき、出た目の最大値が3となる確率は

$$\frac{19}{216}$$

となる。また、出た目の積が8となる3個のさいころの目の組合せは

$$(1, 2, 4), (2, 2, 2)$$

であり、目の出方はそれぞれ3!通り、1通りであるから、出た目の積が8となる確率は

$$\frac{3!+1}{216} = \frac{7}{216}$$

となる。

(iv)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB} \\ &= 2s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

となるから、 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$ とおくと、点Pの存在範囲は三角形OA'Bの周および内部である。

ここで、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= 2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos\angle AOB &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\sin\angle AOB &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \left(\because \sin\angle AOB > 0 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

である。よって、求める面積は

$$\begin{aligned}\triangle OA'B &= \frac{1}{2}\cdot OA'\cdot OB\cdot\sin\angle AOB \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

(v)

$\log_2 x = t$ とおくと、与式は

$$(\log_2 x)^2+5\log_2 x+2=0$$

$$\Leftrightarrow t^2+5t+2=0$$

となる。 $\log_2 \alpha = t_1$, $\log_2 \beta = t_2$ とおくと、 t_1, t_2 は $t^2+5t+2=0$ の2つの解であることより、解と係数の関係から

$$\begin{aligned}t_1+t_2 &= -5 \\ \Leftrightarrow \log_2 \alpha + \log_2 \beta &= -5 \\ \Leftrightarrow \log_2 \alpha\beta &= -5 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta &= 2^{-5}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{1}{32}$$

と求まる。

(vi)

10個の正三角形の辺の長さをそれぞれ $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 、辺の長さからなるデータの平均値を $\bar{a}$ とおくと

$$\bar{a} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} a_k = 9$$

が成り立つ。また、1辺の長さが a である正三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

であるから

$$\frac{1}{10}\left(\sum_{k=1}^{10}\frac{\sqrt{3}}{4}a_k^2\right) = \frac{118\sqrt{3}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = \frac{472}{5}$$

が成り立つ。以上より、辺の長さからなるデータの分散は

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \bar{a}^2 &= \frac{472}{5} - 9^2 \\ &= \frac{67}{5}\end{aligned}$$

である。

II.

〔解答〕

- (i) $A=3, B=-2, C=4, D=1, E=-2$ (ii) $p=2, q=1$ (iii) $b_n=4\cdot 3^{n-1}$ (iv) $a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$
(v)
(iv)より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (4\cdot 3^{k-1} - 2k - 1) \\ &= \frac{4(1-3^n)}{1-3} - 2\cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= 2\cdot 3^n - 2 - n^2 - n - n \\ &= 2\cdot 3^n - (n^2 + 2n + 2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n a_k = 2\cdot 3^n - (n^2 + 2n + 2)$$

〔解説〕

- (i)
- $$\begin{aligned}b_{n+1} &= a_{n+1} + p(n+1) + q \\ &= 3a_n + (p+4)n + p + q \\ &= 3(a_n + pn + q) + (-2p+4)n + (p-2q) \\ &= 3b_n + (-2p+4)n + (p-2q)\end{aligned}$$
- と変形できるから、 $A=3, B=-2, C=4, D=1, E=-2$ となる。
- (ii)
- 数列 $\{b_n\}$ が公比 A の等比数列となるとき

$$\begin{aligned}\begin{cases} -2p+4=0 \\ p-2q=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=1 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。

- (iii)
- $p=2, q=1$ のとき、 $b_1=a_1+2+1=4$ であるから、数列 $\{b_n\}$ は初項4、公比3の等比数列である。よって
- $$b_n = 4\cdot 3^{n-1}$$
- となる。

- (iv)
- $b_n = a_n + 2n + 1$ より
- $$\begin{aligned}a_n &= b_n - 2n - 1 \\ &= 4\cdot 3^{n-1} - 2n - 1\end{aligned}$$

となる。

III.

〔解答〕

(i) $\frac{a-2-\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\tan \theta = 2 + \sqrt{3}, \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{3}, \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(iii) $y = -\sqrt{3}x + 2, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$

(iv)

(iii)より、直線 m の方程式は $y = -\sqrt{3}x + 2$ である。放物線 C の方程式を x で微分すると

$$y' = -2x + a$$

となるから、直線 m が放物線 C の接線となるとき、接点の x 座標を t とおくと

$$-2t + a = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{a + \sqrt{3}}{2}$$

が成り立つ。よって

$$-t^2 + at - \frac{(a - 2 - \sqrt{3})^2}{4} = -\sqrt{3}t + 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (a + \sqrt{3})t + \frac{(a - 2 - \sqrt{3})^2}{4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a + \sqrt{3}}{2} \right)^2 - (a + \sqrt{3}) \left(\frac{a + \sqrt{3}}{2} \right) + \frac{a^2}{4} - \frac{2 + \sqrt{3}}{2}a + \frac{(2 + \sqrt{3})^2}{4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1 + \sqrt{3})a + \sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore a = \sqrt{3}$$

となる。このとき

$$t = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

となり、接点の y 座標は

$$y = -\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2 = -1$$

となるから、 C と m の接点の座標は $(\sqrt{3}, -1)$ である。

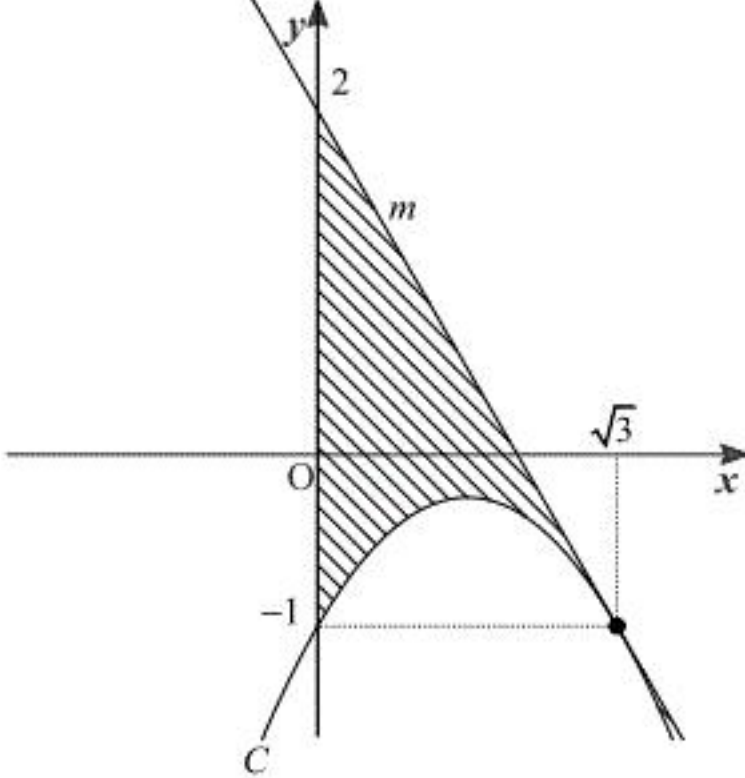
(答) $a = \sqrt{3}$, 接点: $(\sqrt{3}, -1)$

(v)

$a = \sqrt{3}$ のとき、放物線 C の方程式は

$$y = -x^2 + \sqrt{3}x - 1$$

となる。このとき、放物線 C 、直線 m および y 軸で囲まれる図形は下図の斜線部である。



よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ -\sqrt{3}x + 2 - (-x^2 + \sqrt{3}x - 1) \right\} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} (x - \sqrt{3})^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - \sqrt{3})^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \{ 0 - (-3\sqrt{3}) \} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{3}$

〔解説〕

(i)

C と l の共有点の x 座標は、放物線 C と直線 l の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} -x^2 + ax - \frac{(a - 2 - \sqrt{3})^2}{4} &= (2 + \sqrt{3})x \\ \Leftrightarrow x^2 - (a - 2 - \sqrt{3})x + \frac{(a - 2 - \sqrt{3})^2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{a - 2 - \sqrt{3}}{2} \right)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{a - 2 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$\tan \theta$ は直線 l の傾きと等しいから

$$\tan \theta = 2 + \sqrt{3}$$

である。加法定理より

$$\begin{aligned} \tan \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} + 1}{1 - 2 - \sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} \\ &= -\sqrt{3} \\ \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \theta \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - 1}{1 + 2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(iii)

(ii)より、直線 l とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線の傾きは $-\sqrt{3}$ または $\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。よって、求める

直線の方程式は

$$y = -\sqrt{3}x + 2, y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$$

である。