

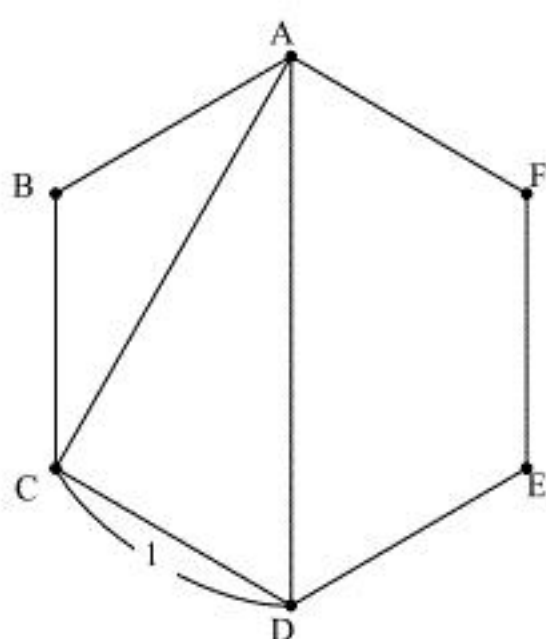
I

【解答】

(i)	$\boxed{\text{ア}}$	
	3	
(ii)	$\boxed{\text{イ}}$	
	$\frac{1}{2}$	
(iii)	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$
	$\frac{2}{9}$	$\frac{13}{27}$
(iv)	$\boxed{\text{オ}}$	
	5	
(v)	$\boxed{\text{カ}}$	
	4	

【解説】

(i)



六角形 ABCDEF は正六角形であるから、

$$\angle ACD = 90^\circ, \angle CDA = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$$

となる。したがって、三角形 CDA は辺の長さの比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形とわかる。よって、 $CD=1$ から、

$$AC = \sqrt{3}, AD = 2$$

となるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AD}| \cos \angle DAC \\ &= \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ &= \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

である。

(ii)

$$x + (2t - 2)y - 4t + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x + (2t + 2)y - 4t - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$2tx + y - 4t = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

とする。①、②より、

$$x + (2t - 2)y - 4t + 2 = x + (2t + 2)y - 4t - 2$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

である。これを①に代入して、

$$x + (2t - 2) \cdot 1 - 4t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2t$$

となる。 $x = 2t, y = 1$ を③に代入して、

$$2t \cdot 2t + 1 - 4t = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)^2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

を得る。

(iii)

4人でじゃんけんを1回するとき、手の出し方は 3^4 通り存在し、これらは同様に確からしい。

ここで、ちょうど2人がグーで勝つとき、残りの2人はチョキを出している。このとき、勝つ2人の選び方は ${}_4C_2$ 通りであり、チョキ、パーで勝つ場合も同様に考えると、ちょうど2人が勝つ確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \cdot 3}{3^4} = \frac{2}{9}$$

である。また、だれも勝たない事象の余事象は、勝敗が決する事象である。ここで、グーで勝って勝敗が決するとき、4人はグーかチョキのいずれかを出している。このときの場合の数は、4人ともグーあるいは4人ともチョキである場合を除く $2^4 - 2$ 通りであり、チョキ、パーで勝つ場合も同様に考えると、勝敗が決する確率は、

$$\frac{(2^4 - 2) \cdot 3}{3^4} = \frac{14}{27}$$

となる。よって、だれも勝たない確率は、

$$1 - \frac{14}{27} = \frac{13}{27}$$

である。

(iv)

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{n(n+2)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}S_n &> \frac{7}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} &> \frac{7}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} &< \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 7 &> 0 \quad (\because (n+1)(n+2) > 0) \\ \Leftrightarrow n &< \frac{3 - \sqrt{37}}{2}, \frac{3 + \sqrt{37}}{2} < n\end{aligned}$$

となる。 $6 < \sqrt{37} < 7$ より、 $\frac{3 - \sqrt{37}}{2} < 0, 4 < \frac{3 + \sqrt{37}}{2} < 5$ であるから、これを満たす最小の自然数 n は、 $n = 5$ である。

(v)

$A = 4^{(4^4)}, B = (4^4)^4$ のとき、

$$\begin{aligned}\log_2 (\log_2 A) - \log_2 (\log_2 B) &= \log_2 \left(\log_2 4^{(4^4)} \right) - \log_2 \left(\log_2 (4^4)^4 \right) \\ &= \log_2 (4^4 \log_2 4) - \log_2 (4 \log_2 4^4) \\ &= \log_2 (4^4 \cdot 2) - \log_2 (4 \cdot 8) \\ &= \log_2 2^9 - \log_2 2^5 \\ &= 9 - 5 \\ &= 4\end{aligned}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(i) $m_1 = 2p + 1, m_2 = 2p + 2$

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= (2p + 1)(2p + 2) \\ &= 4p^2 + 6p + 2 \\ &= 4\left(p + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となるから, $m_1 m_2$ は $p = -\frac{3}{4}$ で最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

(答) $-\frac{1}{4}$

(iii)

直線 PQ, 直線 PR が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ と

おくと, $\tan \alpha = m_1, \tan \beta = m_2$ である。 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において, $\tan x$ は単調増加であるから,

$2p + 2 > 2p + 1$ より $\beta > \alpha$ である。よって, $\theta = \beta - \alpha$ であるから, (i)より,

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{(2p + 2) - (2p + 1)}{1 + (2p + 2)(2p + 1)} \\ &= \frac{1}{4p^2 + 6p + 3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\tan \theta = \frac{1}{4p^2 + 6p + 3}$

(iv)

(iii)より,

$$\tan \theta = \frac{1}{4\left(p + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

であるから, p が実数全体を動くとき, $\tan \theta$ は $0 < \tan \theta \leq \frac{4}{3}$ の範囲をとる。 $0 < \theta < \pi$ と

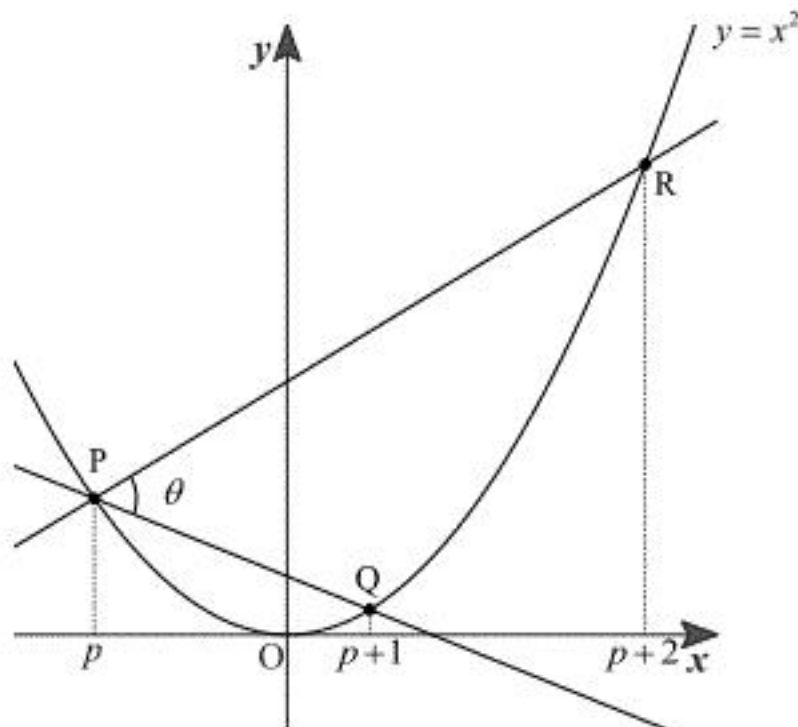
$0 < \tan \theta$ より, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり, この範囲で $\tan \theta$ は単調増加であるから, θ が最大となるの

は $\tan \theta$ が最大値となるときである。したがって, θ が最大になる p の値は $p = -\frac{3}{4}$ である。

(答) $p = -\frac{3}{4}$

〔解説〕

(i)



問題文の状況を図示すると上図のようになる。点 P, Q, R の座標は,

$P(p, p^2), Q(p + 1, (p + 1)^2), R(p + 2, (p + 2)^2)$ であるから,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{(p + 1)^2 - p^2}{(p + 1) - p} \\ &= 2p + 1 \\ m_2 &= \frac{(p + 2)^2 - p^2}{(p + 2) - p} \\ &= 2p + 2 \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

$$(i) \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}, I_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

(ii)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e \frac{(\log x)^{n+1}}{x^2} dx \\ &= \int_1^e (\log x)^{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx \\ &= \left[-\frac{(\log x)^{n+1}}{x} \right]_1^e + (n+1) \int_1^e \frac{(\log x)^n}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1) I_n \end{aligned}$$

となるから、 $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$ である。

$$(答) \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$$

(iii)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \log x - (\log x)^2}{x^2} \\ &= \frac{\log x (2 - \log x)}{x^2} \end{aligned}$$

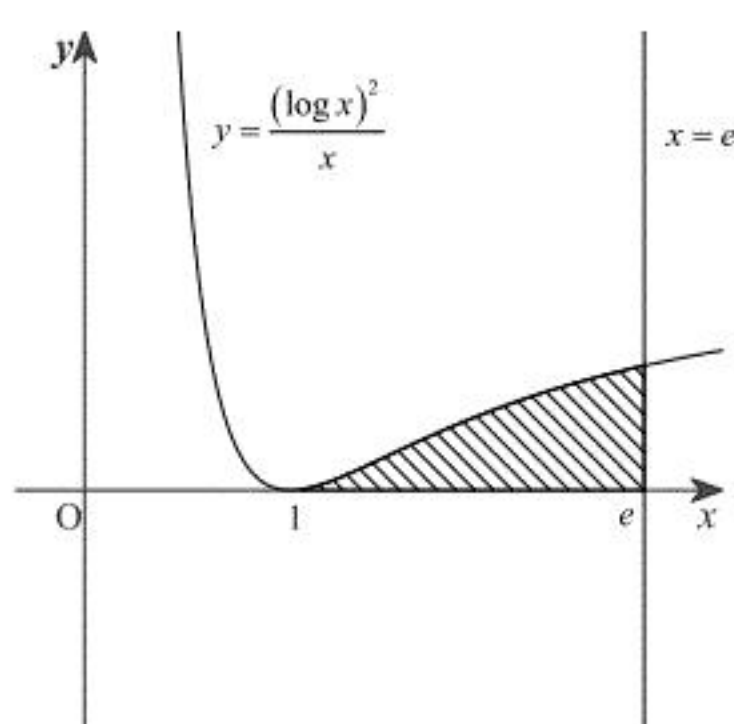
であるから、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	0	...	1	...	e^2	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 $\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

(答) 前表

(iv)

(iii)より、 $y = \frac{(\log x)^2}{x}$ 、 x 軸と $x=e$ とで囲まれた図形は下図の斜線部である。



上図より、(i)、(ii)を使うと、

$$\begin{aligned} V &= \int_1^e \pi \left\{ \frac{(\log x)^2}{x} \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_1^e \frac{(\log x)^4}{x^2} dx \\ &= \pi I_4 \\ &= \pi \left(4I_3 - \frac{1}{e} \right) \\ &= \pi \left\{ 4 \left(3I_2 - \frac{1}{e} \right) - \frac{1}{e} \right\} \\ &= \pi \left\{ 12 \left(2I_1 - \frac{1}{e} \right) - \frac{5}{e} \right\} \\ &= \pi \left\{ 24 \left(1 - \frac{2}{e} \right) - \frac{17}{e} \right\} \\ &= \pi \left(24 - \frac{65}{e} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad V = \pi \left(24 - \frac{65}{e} \right)$$

〔解説〕

(i)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\ &= 1 - \frac{1}{e} \\ I_1 &= \int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= \int_1^e \log x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx \\ &= \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

である。

Ⅳ

(i)

ド・モアブルの定理より,

$$\begin{aligned} z^7 &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)^7 \\ &= \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $z^7 = 1$

(ii)

(i)より,

$$\begin{aligned} z^7 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 &= 0 \quad (\because z \neq 1) \\ \therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 &= -1 \end{aligned}$$

である。

(答) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6 = -1$

(iii)

(i)より, $1 = z^7$ であるから,

$$\begin{aligned} a &= z + \frac{1}{z} \\ &= z + z^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\ &= z^2 + z^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= z^3 + \frac{1}{z^3} \\ &= z^3 + z^4 \end{aligned}$$

となる。したがって, (ii)より,

$$\begin{aligned} A &= a + b + c \\ &= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。

(答) $A = -1$

(iv)

(iii)と同様にして,

$$\begin{aligned} B &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)^2 + \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right)^2 \\ &= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z^4 + 2 + \frac{1}{z^4} + z^6 + 2 + \frac{1}{z^6} \\ &= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 6 \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $B = 5$

(v)

(iii), (iv)より,

$$\begin{aligned} C &= ab + bc + ca \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (A^2 - B) \\ &= \frac{1}{2} \{ (-1)^2 - 5 \} \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。

(答) $C = -2$

(vi)

(iii), (iv), (v)より,

$$\begin{aligned} D &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= A(B - C) \\ &= (-1)\{5 - (-2)\} \\ &= -7 \end{aligned}$$

である。

(答) $D = -7$