

I .

〔解答〕

(i)	ア			
	4			
(ii)	イ			
	$\frac{3}{4}$			
(iii)	ウ	エ	4	
	-2			
(iv)	オ			
	-2			
(v)	カ			
	$\frac{\sqrt{6}}{2}$			
(vi)	キ			
	$\frac{2}{7}$			
(vii)	ク			
	4			

〔解説〕

(i)

分母を有理化すると

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

となることから

$$\begin{aligned}x^2+4xy+y^2&=(x+y)^2+2xy\\&=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4}\\&=(\sqrt{3})^2+1\\&=4\end{aligned}$$

である。

(ii)

直線 $y=mx$ が円 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ と接するとき、直線 $y=mx$ と円の中心 $(3, 1)$ の距離は1で

あることから

$$\begin{aligned}\frac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}&=1\\ \Leftrightarrow |3m-1|&=\sqrt{m^2+1} \left(\because m^2+1 \neq 0 \right) \\ \Leftrightarrow (3m-1)^2 &= m^2+1 \\ \Leftrightarrow 9m^2-6m+1 &= m^2+1 \\ \Leftrightarrow 8m^2-6m &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m(4m-3) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{3}{4} \left(\because m > 0 \right)\end{aligned}$$

である。

(iii)

$x^3+ax+b=0$ が $1+i$ を解に持つとき、 $x^3+ax+b=0$ に $x=1+i$ を代入して

$$\begin{aligned}x^3+ax+b&=0\\ \Leftrightarrow (1+i)^3+a(1+i)+b&=0\\ \Leftrightarrow a+b-2+(a+2)i&=0\end{aligned}$$

と式変形できる。よって複素数の相等より

$$\begin{cases}a+b-2=0\\a+2=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-2, b=4$$

である。

(iv)

$$\begin{aligned}f(n)&=9\cdot 2^{2n}-3\cdot 2^{n+1}+2\\&=9\cdot (2^n)^2-6\cdot 2^n+2\\&=9\left(2^n-\frac{1}{3}\right)^2+1\end{aligned}$$

と変形でき、 $2^{-2}<\frac{1}{3}<2^{-1}$, $f(-1)=\frac{5}{4}>f(-2)=\frac{17}{16}$ であることから $f(n)$ の値が最小となる整数 n は $n=-2$ である。

(v)

与式に $\vec{p}=(x, y, z)$, $\vec{a}=(2, 1, -3)$, $\vec{b}=(0, 1, 1)$ を代入して変形すると

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}&=0\\ \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)-(2x+y-3z)-(2\cdot 0+1\cdot 1-3\cdot 1)&=0\\ \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-y+z^2+3z+2&=0\\ \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2&=1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-2\\ \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{3}{2}\right)^2&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。よって球面の半径は $\frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

(vi)

それぞれの玉の取り出し方は同様に確からしい。赤玉、白玉、青玉のすべてが出る確率は、どの順番で赤玉、白玉、青玉が出る場合でも

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$$

となる。赤玉、白玉、青玉の出る順番は全部で3!通り考えられるから、求める確率は

$$3!\cdot\frac{1}{21}=\frac{2}{7}$$

である。

(vii)

条件 p を満たす自然数 n は1, 7, 13, 19, ...であり、条件 q を満たす自然数 n は1, 5, 9, 13, ...である。 $p\Rightarrow q$ の反例として $n=7$ 、 $q\Rightarrow p$ の反例として $n=5$ が挙げられるから、 p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

Ⅱ.

〔解答〕

$$(i) \quad A_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad (ii) \quad B_n = 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad (iii) \quad B_n - A_n = 3n^3 - 3n^2$$

(iv)

(iii)より

$$\begin{aligned} \int_n^{2n} (ax^2 + bx + c) dx &= B_n - A_n \\ \Leftrightarrow \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_n^{2n} &= 3n^2(n-1) \\ \Leftrightarrow \frac{7a}{3}n^3 + \frac{3b}{2}n^2 + cn &= 3n^3 - 3n^2 \end{aligned}$$

である。これがすべての自然数 n について成り立つとき、係数を比較して

$$\begin{cases} \frac{7a}{3} = 3 \\ \frac{3b}{2} = -3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{9}{7}, b = -2, c = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{9}{7}, b = -2, c = 0$$

〔解説〕

(i)

$3n$ 以下の自然数のうち、3で割って1余るものは、 $k=1, 2, \dots, n$ として $3(k-1)+1=3k-2$ と表せるから

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n (3k-2) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 2n \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

となる。

(ii)

(i)と同様にして

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=1}^n (3k-2)^2 \\ &= 9 \sum_{k=1}^n k^2 - 12 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4 \\ &= \frac{9}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{12}{2}n(n+1) + 4n \\ &= \frac{3}{2}n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 4n \\ &= \frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1) - 12(n+1) + 8\} \\ &= \frac{1}{2}n(6n^2 + 9n + 3 - 12n - 12 + 8) \\ &= 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

である。

(iii)

(i), (ii)より

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= 3n^3 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \right) \\ &= 3n^3 - 3n^2 \end{aligned}$$

と表せる。

Ⅲ.

〔解答〕

(i) $6\cos\theta$ (ii) $C(6\cos\theta+4\sin\theta, 4\cos\theta)$

(iii)

$L^2 = OC^2$ であるから

$$\begin{aligned} L^2 &= OC^2 \\ &= (6\cos\theta+4\sin\theta)^2 + 16\cos^2\theta \\ &= 36\cos^2\theta + 48\sin\theta\cos\theta + 16 \\ &= 36 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 24\sin 2\theta + 16 \\ &= 18\cos 2\theta + 24\sin 2\theta + 34 \end{aligned}$$

となる。よって $a=18, b=24, c=34$ である。

(答) $a=18, b=24, c=34$

(iv)

(iii)より, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ として

$$\begin{aligned} L^2 &= 18\cos 2\theta + 24\sin 2\theta + 34 \\ &= \sqrt{18^2 + 24^2} \left(\frac{18}{\sqrt{18^2 + 24^2}} \cos 2\theta + \frac{24}{\sqrt{18^2 + 24^2}} \sin 2\theta \right) + 34 \\ &= 30 \left(\frac{3}{5} \cos 2\theta + \frac{4}{5} \sin 2\theta \right) + 34 \\ &= 30 \cos(2\theta - \alpha) + 34 \end{aligned}$$

と変形できる。ただし, $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$ である。 L^2 が最大となるとき L も最大となるから,

L^2 の最大値を考える。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $-\alpha < 2\theta - \alpha < \pi - \alpha$ であるから L^2 は

$$\begin{aligned} 2\theta - \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \alpha \end{aligned}$$

で最大値をとる。以上より, $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ のとき L は最大値 $\sqrt{30+34} = 8$ をとる。

(答) 最大値:8, そのときの $\cos 2\theta: \frac{3}{5}$

(v)

$\cos\theta > 0, \sin\theta > 0$ に注意して(ii)に $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ を代入する L が最大値を取るときの C の x 座標は

$$\begin{aligned} 6\cos\theta + 4\sin\theta &= 6\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} + 4\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

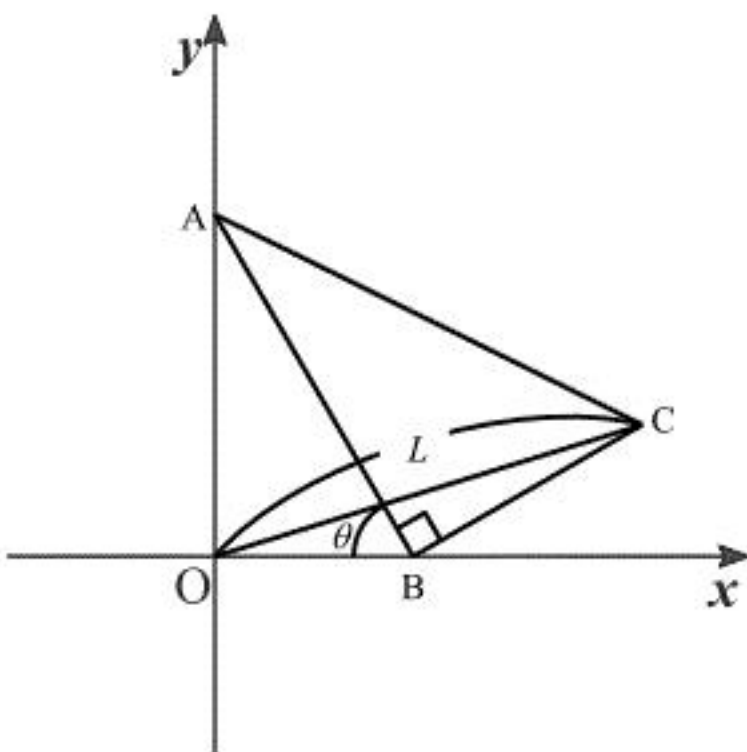
となり, y 座標は

$$\begin{aligned} 4\cos\theta &= 4\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $C\left(\frac{16\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$

〔解説〕



(i)

$AB=6$ より

$$\begin{aligned} OB &= AB\cos\theta \\ &= 6\cos\theta \end{aligned}$$

であるから, B の x 座標は $6\cos\theta$ である。

(ii)

線分 BC と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ と表せるから, $BC=4$ より C の座標は

$$(6\cos\theta+4\sin\theta, 4\cos\theta)$$

となる。