

I.

〔解答〕

(i)	ア	
	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	
(ii)	イ	
	3	
(iii)	ウ	
	360	
(iv)	エ	
	-2	
(v)	オ	カ
	0	$a=0$ または $a\leq-2$

〔解説〕

(i)

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $\cos\theta>0$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan^2\theta+1&=\frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow (-2\sqrt{2})^2+1&=\frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta&=\frac{1}{9} \\ \therefore \cos\theta&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、

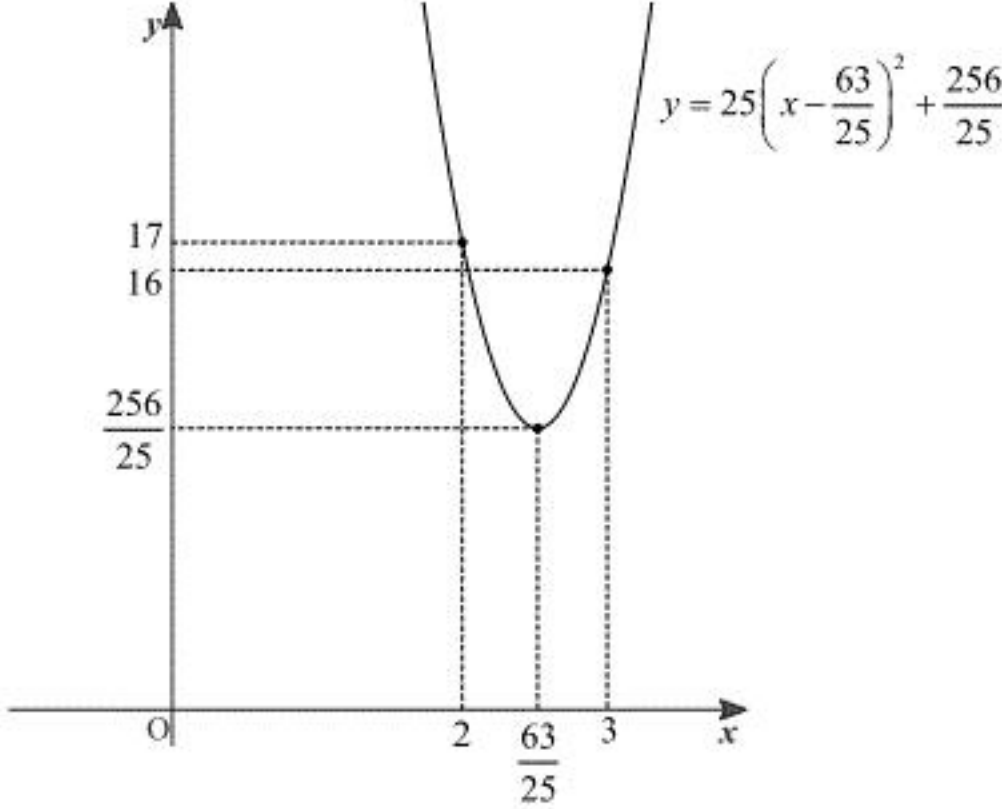
$$\begin{aligned}\sin\theta&=\tan\theta\cdot\cos\theta \\ &=-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} \\ &=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned}|\vec{a}-t\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &=\{(-5)^2+12^2\}-2t\{(-5)\cdot(-3)+12\cdot4\}+t^2\{(-3)^2+4^2\} \\ &=169-126t+25t^2 \\ &=25\left(t-\frac{63}{25}\right)^2+\frac{256}{25}\end{aligned}$$

である。ここで、実数 x について、 $y=25\left(x-\frac{63}{25}\right)^2+\frac{256}{25}$ のグラフは以下のように描ける。



よって、 $|\vec{a}-t\vec{b}|^2$ を最小にする整数 t の値は、3となる。したがって、 $|\vec{a}-t\vec{b}|>0$ であるから、

$|\vec{a}-t\vec{b}|$ を最小にする整数 t の値は、3となる。

(iii)

S, U, C, C, E, S, Sの7個の文字全部を1列に並べてできる文字列は、Sが3個、Cが2個現れるから、全部で

$$\frac{7!}{3!2!}=420 \text{ (通り)}$$

ある。ここで、S, U, C, C, E, S, Sの7個の文字全部を1列に並べてできる文字列のうちSが3個連続する文字列は、3個のSを1文字として考えると、5個の文字のうちCが2個現れるから、

$$\frac{5!}{2!}=60 \text{ (通り)}$$

ある。よって、S, U, C, C, E, S, Sの7個の文字全部を1列に並べてできる文字列のうちSが3個連続することのない並べ方は、全部で

$$420-60=360 \text{ (通り)}$$

ある。

(iv)

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は1の3乗根であるから、

$$\begin{aligned}\omega^3-1&=0 \\ \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)&=0 \\ \therefore \omega^2+\omega+1&=0 \text{ (}\because \omega\neq 1\text{)}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\omega^{2021}+\omega^{1000}-\omega^{301}+\omega-1&=(\omega^3)^{673}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{333}\cdot\omega-(\omega^3)^{100}\cdot\omega+\omega-1 \\ &=\omega^2+\omega-\omega+\omega-1 \\ &=\omega^2+\omega-1 \\ &=(\omega^2+\omega+1)-2 \\ &=-2\end{aligned}$$

となる。

(v)

$f(x)=ax^2+3a$, $g(x)=2ax-a^2$ より、すべての実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき、

$$ax^2+3a=2ax-a^2$$

は x についての恒等式となるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} a=0 \\ 0=2a \\ 3a=-a^2 \end{cases} \\ \therefore a=0$$

が得られる。また、少なくとも1つの実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つ条件は、

$$\begin{aligned}ax^2+3a&=2ax-a^2 \\ \therefore ax^2-2ax+a^2+3a&=0 \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

を満たす実数 x が少なくとも1つ存在することである。 $a=0$ のとき、すべての実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つ。 $a\neq 0$ のとき、2次方程式 $ax^2-2ax+a^2+3a=0$ が少なくとも1つ

の実数解をもてばよい。求める条件は、①の判別式を D とすると $\frac{D}{4}\geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&\geq 0 \\ \Leftrightarrow (-a)^2-a(a^2+3a)&\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2(a+2)&\leq 0 \\ \therefore a&\leq -2 \text{ (}\because a\neq 0\text{)}\end{aligned}$$

となる。したがって、少なくとも1つの実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つような a の条件は、

$$a=0 \text{ または } a\leq -2$$

である。

Ⅱ.

〔解答〕

(i)	(ii)
$a_2 = 2, a_3 = \frac{7}{2}, a_4 = \frac{11}{2}$	$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6, b_4 = 10$

(iii)

$$\begin{aligned} b_n = 2a_n - 1 &\Leftrightarrow a_n = \frac{b_n + 1}{2} \text{ であるから, } na_{n+1} - (n+2)a_n + 1 = 0 \text{ より,} \\ n \cdot \frac{b_{n+1} + 1}{2} - (n+2) \cdot \frac{b_n + 1}{2} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow nb_{n+1} - (n+2)b_n &= 0 \\ \therefore b_{n+1} &= \frac{n+2}{n}b_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $b_{n+1} = \frac{n+2}{n}b_n$

(iv)

$$\begin{aligned} c_n = \frac{b_n}{n(n+1)} &\Leftrightarrow b_n = n(n+1)c_n \text{ であるから, } b_{n+1} = \frac{n+2}{n}b_n \text{ より,} \\ (n+1)(n+2)c_{n+1} &= \frac{n+2}{n} \cdot n(n+1)c_n \\ \therefore c_{n+1} &= c_n \end{aligned}$$

となる。よって, $c_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ より,

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $c_n = \frac{1}{2}$

(v)

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2}, b_n &= n(n+1)c_n \text{ より,} \\ b_n &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

となる。よって, $a_n = \frac{b_n + 1}{2}$ より,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{4} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{4}$

〔解説〕

(i)

$$\begin{aligned} a_1 = 1, na_{n+1} - (n+2)a_n + 1 &= 0 \text{ より,} \\ 1 \cdot a_2 - 3 \cdot 1 + 1 &= 0 \Leftrightarrow a_2 = 2 \\ 2 \cdot a_3 - 4 \cdot 2 + 1 &= 0 \Leftrightarrow a_3 = \frac{7}{2} \\ 3 \cdot a_4 - 5 \cdot \frac{7}{2} + 1 &= 0 \Leftrightarrow a_4 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned} b_n &= 2a_n - 1 \text{ より,} \\ b_1 &= 2a_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ b_2 &= 2a_2 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ b_3 &= 2a_3 - 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 6 \\ b_4 &= 2a_4 - 1 = 2 \cdot \frac{11}{2} - 1 = 10 \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ.

〔解答〕

(i)
$g'(x)=x(2\log x-1)$

(ii)

$F(x)=\int_{2x}^xf(t)dx$ の両辺を x について微分すると、

$$F'(x)=f(x)$$

が得られる。また、 $F(2x)=x^2(\log x-1)$ であるから、(i)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\{F(2x)\}' &= g'(x) \\ \Leftrightarrow 2\cdot F'(2x) &= x(2\log x-1) \\ \Leftrightarrow F'(2x) &= \frac{x}{2}(2\log x-1) \\ \therefore F'(x) &= \frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)\end{aligned}$$

である。よって、

$$f(x)=\frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)$$

となる。

(答) $f(x)=\frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)$

(iii)

$f(x)=\frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)$ より、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{4}\cdot\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)+\frac{x}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

(答) $f'(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}$

(iv)

$f'(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}$ より、 $f'(x)=0$ を満たす実数 x は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{x}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} &= e^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore x &= \frac{2}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

である。これは $x>0$ を満たす。

(答) $x=\frac{2}{\sqrt{e}}$

(v)

(iv)より、 $x>0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $f(x)$ の最小値は、

$$\begin{aligned}f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) &= \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{4}\left(2\log\frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{2}-1\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}\left(2\log e^{-\frac{1}{2}}-1\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{\sqrt{e}}$

〔解説〕

(i)

$g(x)=x^2(\log x-1)$ より、

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2x\cdot(\log x-1)+x^2\cdot\frac{1}{x} \\ &= x(2\log x-1)\end{aligned}$$

である。

Ⅳ.

(i)

OA = 2, OB = 2, AB = 3 より,

$$\begin{aligned} |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 &= OB^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + OA^2 \\ \Leftrightarrow 3^2 &= 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また, OB = 2, OC = 4, BC = 4 より,

$$\begin{aligned} |\vec{c} - \vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow BC^2 &= OC^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + OB^2 \\ \Leftrightarrow 4^2 &= 4^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2^2 \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= 2 \end{aligned}$$

となり, OC = 4, OA = 2, CA = 4 より,

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow CA^2 &= OA^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + OC^2 \\ \Leftrightarrow 4^2 &= 2^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + 4^2 \\ \therefore \vec{c} \cdot \vec{a} &= 2 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}, \vec{b} \cdot \vec{c} = 2, \vec{c} \cdot \vec{a} = 2$$

(ii)

OA, OB の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$

となる。ここで, 三角形の外心は各辺の垂直二等分線の交点より, OA ⊥ MH, OB ⊥ NH であるから,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{NH} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \vec{a} \cdot \left\{ \left(s\vec{a} + t\vec{b} \right) - \frac{1}{2}\vec{a} \right\} = 0 \\ \vec{b} \cdot \left\{ \left(s\vec{a} + t\vec{b} \right) - \frac{1}{2}\vec{b} \right\} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left(s - \frac{1}{2} \right) |\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(t - \frac{1}{2} \right) |\vec{b}|^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \left(s - \frac{1}{2} \right) \cdot 2^2 + t \left(-\frac{1}{2} \right) = 0 \\ s \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(t - \frac{1}{2} \right) \cdot 2^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4s - \frac{t}{2} - 2 = 0 \\ -\frac{s}{2} + 4t - 2 = 0 \end{cases} \\ \therefore &s = \frac{4}{7}, t = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(答) \quad s = \frac{4}{7}, t = \frac{4}{7}$$

(iii)

$\overrightarrow{OH} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b}$ であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OH} &= \left\{ \left(\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} \right) - \vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} \right) \\ &= \frac{16}{49}|\vec{a}|^2 + \frac{16}{49}|\vec{b}|^2 + \frac{32}{49}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{4}{7}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{4}{7}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{16}{49} \cdot 2^2 + \frac{16}{49} \cdot 2^2 + \frac{32}{49} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{4}{7} \cdot 2 - \frac{4}{7} \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} &= \left\{ \left(\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} \right) - \vec{c} \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} \right) - \vec{a} \right\} \\ &= -\frac{12}{49}|\vec{a}|^2 + \frac{16}{49}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{49}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{4}{7}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{3}{7}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= -\frac{12}{49} \cdot 2^2 + \frac{16}{49} \cdot 2^2 + \frac{4}{49} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{4}{7} \cdot 2 + \frac{3}{7} \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OH} = 0, \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

(iv)

$\overrightarrow{CH} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} - \vec{c}$ より,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} - \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{16}{49}|\vec{a}|^2 + \frac{16}{49}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{32}{49}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{8}{7}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{8}{7}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{16}{49} \cdot 2^2 + \frac{16}{49} \cdot 2^2 + 4^2 + \frac{32}{49} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{8}{7} \cdot 2 - \frac{8}{7} \cdot 2 \\ &= \frac{672}{49} \\ \therefore CH &= |\overrightarrow{CH}| = \frac{4\sqrt{42}}{7} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad CH = \frac{4\sqrt{42}}{7}$$

(v)

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OH} = 0, \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ より, CH ⊥ △OAB である。ここで, △OAB の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2^2 \cdot 2^2 - \left(-\frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

が得られる。よって, 四面体 OABC の体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot CH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{42}}{7} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad V = \sqrt{6}$$