

I.

【解答】

(i)	ア	
	$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	
(ii)	イ	
	3	
(iii)	ウ	
	360	
(iv)	エ	
	-2	
(v)	オ	カ
	0	$a=0$ または $a\leq -2$

【解説】

(i)

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より、 $\cos\theta>0$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan^2\theta+1&=\frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow (-2\sqrt{2})^2+1&=\frac{1}{\cos^2\theta} \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta&=\frac{1}{9} \\ \therefore \cos\theta&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、

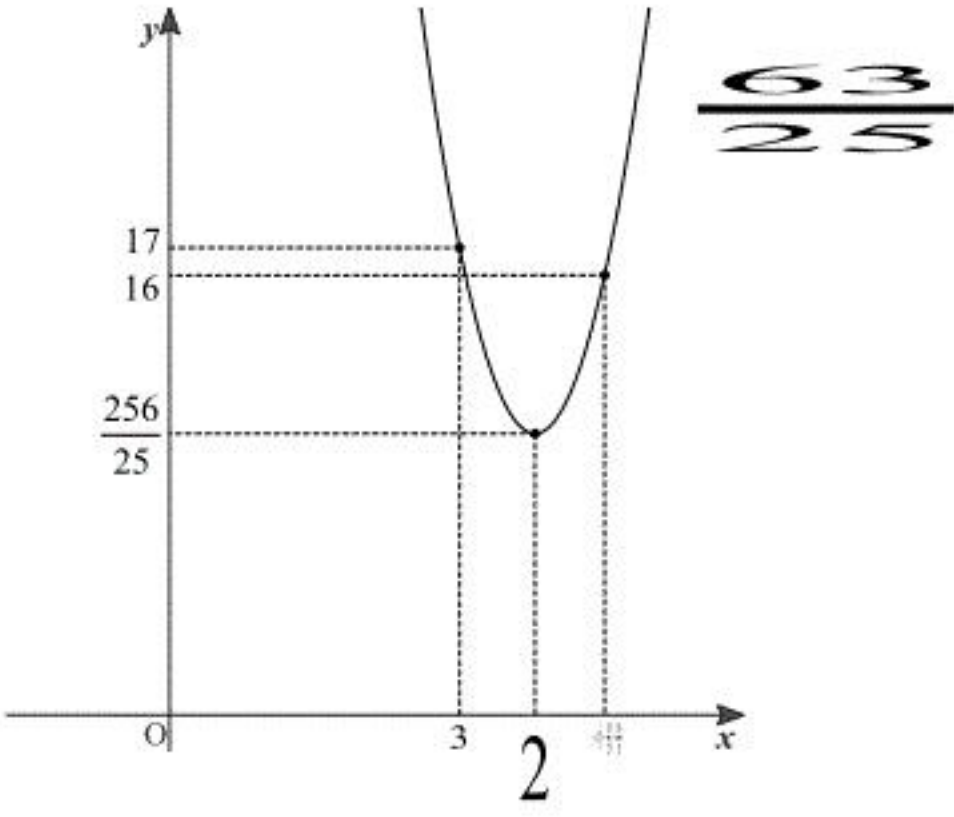
$$\begin{aligned}\sin\theta&=\tan\theta\cdot\cos\theta \\ &=-2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3} \\ &=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\begin{aligned}|\vec{a}-t\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &=\{(-5)^2+12^2\}-2t\{(-5)\cdot(-3)+12\cdot4\}+t^2\{(-3)^2+4^2\} \\ &=169-126t+25t^2 \\ &=25\left(t-\frac{63}{25}\right)^2+\frac{256}{25}\end{aligned}$$

である。ここで、実数 x について、 $y=25\left(x-\frac{63}{25}\right)^2+\frac{256}{25}$ のグラフは以下のように描ける。



よって、 $|\vec{a}-t\vec{b}|^2$ を最小にする整数 t の値は、3 となる。したがって、 $|\vec{a}-t\vec{b}|>0$ であるから、

$|\vec{a}-t\vec{b}|$ を最小にする整数 t の値は、3 となる。

(iii)

S, U, C, C, E, S, S の 7 個の文字全部を 1 列に並べてできる文字列は、S が 3 個、C が 2 個現れるから、全部で

$$\frac{7!}{3!2!}=420 \text{ (通り)}$$

ある。ここで、S, U, C, C, E, S, S の 7 個の文字全部を 1 列に並べてできる文字列のうち S が 3 個連続する文字列は、3 個の S を 1 文字として考えると、5 個の文字のうち C が 2 個現れるから、

$$\frac{5!}{2!}=60 \text{ (通り)}$$

ある。よって、S, U, C, C, E, S, S の 7 個の文字全部を 1 列に並べてできる文字列のうち S が 3 個連続することのない並べ方は、全部で

$$420-60=360 \text{ (通り)}$$

ある。

(iv)

$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は 1 の 3 乗根であるから、

$$\begin{aligned}\omega^3-1&=0 \\ \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)&=0 \\ \therefore \omega^2+\omega+1&=0 \text{ (}\because \omega\neq 1\text{)}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\omega^{2021}+\omega^{1000}-\omega^{301}+\omega-1&=(\omega^3)^{673}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{333}\cdot\omega-(\omega^3)^{100}\cdot\omega+\omega-1 \\ &=\omega^2+\omega-\omega+\omega-1 \\ &=\omega^2+\omega-1 \\ &=(\omega^2+\omega+1)-2 \\ &=-2\end{aligned}$$

となる。

(v)

$f(x)=ax^2+3a$, $g(x)=2ax-a^2$ より、すべての実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つとき、

$$ax^2+3a=2ax-a^2$$

は x についての恒等式となるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} a=0 \\ 0=2a \\ 3a=-a^2 \end{cases} \\ \therefore a=0$$

が得られる。また、少なくとも 1 つの実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つ条件は、

$$\begin{aligned}ax^2+3a&=2ax-a^2 \\ \therefore ax^2-2ax+a^2+3a&=0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

を満たす実数 x が少なくとも 1 つ存在することである。 $a=0$ のとき、すべての実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つ。 $a\neq 0$ のとき、2 次方程式 $ax^2-2ax+a^2+3a=0$ が少なくとも 1 つ

の実数解をもてばよい。求める条件は、①の判別式を D とすると $\frac{D}{4}\geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&\geq 0 \\ \Leftrightarrow (-a)^2-a(a^2+3a)&\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2(a+2)&\leq 0 \\ \therefore a&\leq -2 \text{ (}\because a\neq 0\text{)}\end{aligned}$$

となる。したがって、少なくとも 1 つの実数 x に対して $f(x)=g(x)$ が成り立つような a の条件は、

$$a=0 \text{ または } a\leq -2$$

である。

Ⅱ.

〔解答〕

(i)	(ii)
$a_2 = 2, a_3 = \frac{7}{2}, a_4 = \frac{11}{2}$	$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6, b_4 = 10$

(iii)

$$b_n = 2a_n - 1 \Leftrightarrow a_n = \frac{b_n + 1}{2} \text{ であるから, } na_{n+1} - (n+2)a_n + 1 = 0 \text{ より,}$$

$$n \cdot \frac{b_{n+1} + 1}{2} - (n+2) \cdot \frac{b_n + 1}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow nb_{n+1} - (n+2)b_n = 0$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{n+2}{n} b_n$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_{n+1} = \frac{n+2}{n} b_n$$

(iv)

$$c_n = \frac{b_n}{n(n+1)} \Leftrightarrow b_n = n(n+1)c_n \text{ であるから, } b_{n+1} = \frac{n+2}{n} b_n \text{ より,}$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot n(n+1)c_n$$

$$\therefore c_{n+1} = c_n$$

$$\text{となる。よって, } c_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad c_n = \frac{1}{2}$$

(v)

$$c_n = \frac{1}{2}, b_n = n(n+1)c_n \text{ より,}$$

$$b_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{となる。よって, } a_n = \frac{b_n + 1}{2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 1}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2}{4} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad a_n = \frac{n^2 + n + 2}{4}$$

〔解説〕

(i)

$$a_1 = 1, na_{n+1} - (n+2)a_n + 1 = 0 \text{ より,}$$

$$1 \cdot a_2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow a_2 = 2$$

$$2 \cdot a_3 - 4 \cdot 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a_3 = \frac{7}{2}$$

$$3 \cdot a_4 - 5 \cdot \frac{7}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow a_4 = \frac{11}{2}$$

となる。

(ii)

$$b_n = 2a_n - 1 \text{ より,}$$

$$b_1 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$b_2 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$b_3 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 6$$

$$b_4 = 2a_4 - 1 = 2 \cdot \frac{11}{2} - 1 = 10$$

となる。

Ⅲ.

〔解答〕

(i)
$g'(x) = x(2\log x - 1)$

(ii)

$F(x) = \int_{2e}^x f(t)dx$ の両辺を x について微分すると、

$$F'(x) = f(x)$$

が得られる。また、 $F(2x) = x^2(\log x - 1)$ であるから、(i)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} \{F(2x)\}' &= g'(x) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot F'(2x) &= x(2\log x - 1) \\ \Leftrightarrow F'(2x) &= \frac{x}{2}(2\log x - 1) \\ \therefore F'(x) &= \frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

である。よって、

$$f(x) = \frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)$$

となる。

$$(答) \quad f(x) = \frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)$$

(iii)

$$f(x) = \frac{x}{4}\left(2\log\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left(2\log\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \frac{x}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad f'(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

(iv)

$$f'(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{ より, } f'(x) = 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ は,}$$

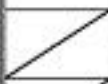
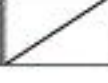
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{x}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} &= e^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore x &= \frac{2}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

である。これは $x > 0$ を満たす。

$$(答) \quad x = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

(v)

(iv)より、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって、 $f(x)$ の最小値は、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) &= \frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{4} \left(2\log\frac{\frac{2}{\sqrt{e}}}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}} \left(2\log e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

〔解説〕

(i)

$$g(x) = x^2(\log x - 1) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x \cdot (\log x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x(2\log x - 1) \end{aligned}$$

である。