

2021年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄アークにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $x > 0$ における $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)$ の最小値は ア である。

(ii) 円 C に内接する四角形 PQRS において、対角線 PR は円 C の中心 O を通る。

また、各辺の長さは、 $PQ = 1$ 、 $QR = 8$ 、 $RS = 4$ 、 $SP = 7$ であり、角 P の大き

さを θ とする。ただし $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、円 C の直径は イ、

$\cos \theta =$ ウ である。

(iii) 3 個のさいころを 1 回投げるとき、出た目の最大値が 3 となる確率は エ であ

り、また、出た目の積が 8 となる確率は オ である。

(iv) 三角形 OAB において、2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ は $|\overrightarrow{OA}| = 3$ 、 $|\overrightarrow{OB}| = 2$ 、

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$ を満たすとする。実数 s 、 t が

$$s \geq 0, t \geq 0, 2s + t \leq 1$$

を満たすとき、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と表されるような点 P の存在する範囲の面積は

カ である。

(v) x についての方程式 $(\log_2 x)^2 + 5 \log_2 x + 2 = 0$ の 2 つの解を α 、 β とおくと、

$\alpha\beta =$ キ である。

(vi) 10 個の正三角形がある。それらの辺の長さからなるデータの平均値は 9 である。

また、それらの面積からなるデータの平均値は $\frac{118\sqrt{3}}{5}$ である。このとき、辺の長

さからなるデータの分散は ク である。

Ⅱ. 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、 n に無関係な定数 p, q に対し、

$$b_n = a_n + pn + q \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i)～(iv)については答えのみを、(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) n, p, q に無関係な定数 A, B, C, D, E が

$$b_{n+1} = Ab_n + (Bp + C)n + (Dp + Eq) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、 A, B, C, D, E の値をそれぞれ求めよ。

(ii) A を(i)で求めた値とする。数列 $\{b_n\}$ が公比 A の等比数列となるような p, q の値をそれぞれ求めよ。

(iii) (ii)で求めた p, q の値に対して、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(iv) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(v) 和 $\sum_{k=1}^n a_k$ を n を用いて表せ。

Ⅲ. a を実数の定数とする。座標平面上の放物線 $C: y = -x^2 + ax - \frac{(a-2-\sqrt{3})^2}{4}$,

直線 $l: y = (2 + \sqrt{3})x$ がある。 l と x 軸のなす角を θ とおく。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

とする。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。答えが分数になるときには既約分数とし、

分母に根号を含むときには分母を有理化すること。例えば $\frac{\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\frac{2\sqrt{2}}{4}$ などと答えてはならない。解答欄には、(i)～(iii)については答えのみを、(iv),

(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) C と l の共有点の x 座標を a を用いて表せ。

(ii) $\tan \theta$, $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$, $\tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$ の値をそれぞれ求めよ。

(iii) y 切片が 2 であり、 l とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線の方程式をすべて求めよ。

(iv) (iii)で求めた直線のうち、傾きが負であるものを m とする。 C と m が接するときの a の値を求めよ。また、そのとき、 C と m の接点の座標を求めよ。

(v) a を(iv)で求めた値とすると、 C , m および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

【以下余白】

