

2021年度

A a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてH Bの黒鉛筆またはH Bの黒のシャープペンシルで記入することになっています。H Bの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はI～IVとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子を持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～カにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 1 辺の長さが 1 の正六角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F とする。

このとき、2 つのベクトル \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} の内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ の値は ア である。

(ii) t を実数とする。座標平面上の 3 つの直線

$$x + (2t - 2)y - 4t + 2 = 0,$$

$$x + (2t + 2)y - 4t - 2 = 0,$$

$$2tx + y - 4t = 0$$

が 1 つの点で交わるような t の値をすべて求めると $t =$ イ である。

(iii) 4 人でじゃんけんを 1 回するとき、ちょうど 2 人が勝つ確率は ウ であり、

また、だれも勝たない確率は エ である。

(iv) 一般項が $a_n = \frac{2}{n(n+2)}$ であるような数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を

S_n とする。 $S_n > \frac{7}{6}$ を満たす最小の自然数 n は オ である。

(v) $A = 4^{(4^4)}$, $B = (4^4)^4$ のとき、 $\log_2(\log_2 A) - \log_2(\log_2 B)$ の値を整数で表す

と カ である。

II. 座標平面において、放物線 $y = x^2$ 上の点で x 座標が $p, p + 1, p + 2$ である点をそれぞれP, Q, Rとする。また、直線PQの傾きを m_1 、直線PRの傾きを m_2 、 $\angle QPR = \theta$ とする。このとき、次の問(i)～(iv)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(iv)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) m_1, m_2 をそれぞれ p を用いて表せ。

(ii) p が実数全体を動くとき、 m_1m_2 の最小値を求めよ。

(iii) $\tan \theta$ を p を用いて表せ。

(iv) p が実数全体を動くとき、 θ が最大になる p の値を求めよ。

III. n を 0 以上の整数とする。定積分

$$I_n = \int_1^e \frac{(\log x)^n}{x^2} dx$$

について、次の問(i)～(iv)に答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(iv)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) I_0, I_1 の値をそれぞれ求めよ。

(ii) I_{n+1} を I_n と n を用いて表せ。

(iii) $x > 0$ とする。関数 $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ の増減表を書け。ただし、極値も増減表に記入すること。

(iv) 座標平面上の曲線 $y = \frac{(\log x)^2}{x}$, x 軸と直線 $x = e$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

IV. 複素数 z を

$$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

とする。ただし、 i は虚数単位とする。また、

$$a = z + \frac{1}{z}, \quad b = z^2 + \frac{1}{z^2}, \quad c = z^3 + \frac{1}{z^3}$$

とおく。次の問(i)～(vi)に答えよ。解答欄には、答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) z^7 は有理数になる。その値を求めよ。

(ii) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ は有理数になる。その値を求めよ。

(iii) $A = a + b + c$ は有理数になる。その値を求めよ。

(iv) $B = a^2 + b^2 + c^2$ は有理数になる。その値を求めよ。

(v) $C = ab + bc + ca$ は有理数になる。その値を求めよ。

(vi) $D = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ は有理数になる。その値を求めよ。

【以下余白】

— A_a 数11 —

