

2021年度

C 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

- I. 下記の空欄ア～キにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。また、空欄クには (vii)にある選択肢 1～4の中から最も適切な番号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $x = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ のとき $x^2 + 4xy + y^2 =$ ア である。

(ii) m を正の実数とする。直線 $y = mx$ が円 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ と接するとき、 $m =$ イ である。

(iii) i を虚数単位、 a, b を実数とする。このとき、3次方程式

$$x^3 + ax + b = 0$$

が $1+i$ を解に持てば、 $a =$ ウ , $b =$ エ である。

(iv) 整数 n に対して、 $f(n) = 9 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^{n+1} + 2$ とする。 $f(n)$ の値が最小となる整数 n は オ である。

(v) 3つの空間ベクトル $\vec{p}, \vec{a}, \vec{b}$ を $\vec{p} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (2, 1, -3)$,

$\vec{b} = (0, 1, 1)$ とするとき、方程式

$$\vec{p} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{p} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

で表される球面の半径は カ である。ただし、 $\vec{p} \cdot \vec{p}$, $\vec{a} \cdot \vec{p}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はそれぞれ $\vec{p}$ と $\vec{p}$ の内積, $\vec{a}$ と $\vec{p}$ の内積, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積である。

(vi) 赤玉4個、白玉3個、青玉2個が入っている袋から、玉を1個ずつ3回続けて取り出す。ただし、取り出した玉はもとに戻さないものとする。このとき、赤玉、白玉、青玉のすべてが出る確率は キ である。

(vii) 自然数 n に関する条件 p, q を次のように定める。

$p : n$ を 6 で割ると余りは 1 である。

$q : n$ を 4 で割ると余りは 1 である。

このとき、 p は q であるための ク

1. 必要条件であるが十分条件ではない。
2. 十分条件であるが必要条件ではない。
3. 必要十分条件である。
4. 必要条件でも十分条件でもない。

II. n を自然数とする。 $3n$ 以下の自然数のうち、 3 で割って 1 余るものすべての和を A_n

とする。また、 $3n$ 以下の自然数のうち、 3 で割って 1 余るものすべてについて、それぞれの 2 乗の和を B_n とする。例えば $n = 3$ の場合は $A_3 = 1 + 4 + 7$, $B_3 = 1^2 + 4^2 + 7^2$ である。

このとき、次の問 (i) ~ (iv) に答えよ。解答欄には、(i) ~ (iii) については答えのみを、(iv) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) A_n を n を用いて表せ。

(ii) B_n を n を用いて表せ。

(iii) $B_n - A_n$ を n を用いて表せ。

(iv) a, b, c を定数とする。すべての自然数 n について

$$\int_n^{2n} (ax^2 + bx + c) dx = B_n - A_n$$

が成り立つとき、 a, b, c を求めよ。

Ⅲ. 原点を O とする座標平面上において, $AB = 6$, $BC = 4$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC の頂点 A は y 軸上の正の部分, 頂点 B は x 軸上の正の部分にあり, 頂点 C は第一象限にあるとする。また, $OC = L$, $\angle ABO = \theta$ とおく。このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には, (i), (ii) については答えのみを, (iii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) B の x 座標を θ を用いて表せ。

(ii) C の座標を θ を用いて表せ。

(iii) $L^2 = a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c$ をみたす定数 a, b, c を求めよ。

(iv) L の最大値を求めよ。またそのときの $\cos 2\theta$ の値を求めよ。

(v) L が最大値をとる時の C の座標を求めよ。

【以下余白】

