

2021年度

C_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてHBの黒鉛筆またはHBの黒のシャープペンシルで記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は12ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～カにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan \theta = -2\sqrt{2}$ のとき, $\sin \theta =$ ア である。

(ii) 2つのベクトルを $\vec{a} = (-5, 12)$, $\vec{b} = (-3, 4)$ とする。整数 t に対して, $|\vec{a} - t\vec{b}|$ を最小とする t の値は イ である。

(iii) S, U, C, C, E, S, Sの7個の文字全部を1列に並べてできる文字列のうち, Sが3個連続することのない並べ方は, 全部で ウ 通りある。

(iv) 1の3乗根 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ に対して, $\omega^{2021} + \omega^{1000} - \omega^{301} + \omega - 1 =$ エ である。ただし, i は虚数単位である。

(v) a を実数とする。 x の関数を $f(x) = ax^2 + 3a$, $g(x) = 2ax - a^2$ とする。このとき, すべての実数 x に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つような実数 a をすべて求めると $a =$ オ である。また, 少なくとも1つの実数 x について $f(x) = g(x)$ が成り立つような実数 a の条件は カ である。

Ⅱ. 数列 $\{a_n\}$ を次の条件により定める。

$$a_1 = 1, \quad na_{n+1} - (n+2)a_n + 1 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 2a_n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。さらに、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \frac{b_n}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i), (ii)については答えのみを、(iii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) a_2, a_3, a_4 の値をそれぞれ求めよ。
- (ii) b_1, b_2, b_3, b_4 の値をそれぞれ求めよ。
- (iii) b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。
- (iv) $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (v) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

Ⅲ. 関数 $f(x)$ は $x > 0$ で連続とし、また、関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_{2e}^x f(t) dt$$

と定める。ただし、 e は自然対数の底である。さらに、 $F(x)$ は $x > 0$ において条件

$$F(2x) = x^2 (\log x - 1)$$

を満たすとする。次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) $g(x) = x^2(\log x - 1)$ とするとき、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(ii) $f(x)$ を求めよ。

(iii) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(iv) $f'(x) = 0$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(v) $f(x)$ の最小値を求めよ。

IV. 四面体OABCにおいて,

$$OA = OB = 2, \quad AB = 3, \quad OC = BC = CA = 4$$

とする。また, 点Hは三角形OABの外心とする。以下, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする。次の問(i)~(v)に答えよ。解答欄には, 答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) 3つの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$, $\vec{c} \cdot \vec{a}$ の値をそれぞれ求めよ。
- (ii) 2つの実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき, s, t の値を求めよ。
- (iii) 2つの内積 $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH}$ の値をそれぞれ求めよ。
- (iv) CHの長さを求めよ。
- (v) 四面体OABCの体積 V を求めよ。

【以下余白】

