

I .

【解答】

(i)	ア	
	$2\sqrt{5}$	
(ii)	イ	
	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	
(iii)	ウ	
	4, 5	
(iv)	エ	
	$\frac{13}{32}$	
(v)	オ	カ
	m^2-2m+2	45
(vi)	キ	
	8	

【解説】

(i)

$x+y=2$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} &= -\frac{1}{2} \\ \therefore xy &= -4\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}|x-y|^2 &= (x+y)^2-4xy \\ &= 2^2-4\cdot(-4) \\ &= 20\end{aligned}$$

である。したがって

$$|x-y|=2\sqrt{5}$$

である。

(ii)

[1] $x<2$ のとき

$x-2<0$ より

$$\begin{aligned}|x-|x-2|| &= 1 \\ \Leftrightarrow |x+(x-2)| &= 1 \\ \Leftrightarrow 2|x-1| &= 1 \\ \Leftrightarrow x-1 &= \pm\frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。これらはともに $x<2$ を満たしている。

[2] $2\leq x$ のとき

$x-2\geq 0$ より

$$\begin{aligned}|x-|x-2|| &= |x-(x-2)| \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。つまりこの範囲に $|x-|x-2||=1$ となる実数は存在しない。

以上, [1], [2]より, 求める実数 x は $x=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ である。

(iii)

$F(x)=x^3-6x+a$ を $G(x)=x^2-3x+2$ で割ると

$$x^3-6x+a=(x^2-3x+2)(x+3)+x+a-6$$

となる。よって $R(x)=x+a-6$ である。また $G(x)=(x-1)(x-2)$ であるから, $G(x)$ が $R(x)$ で割り切れるような a の値は

$$\begin{aligned}a-6 &= -1, -2 \\ \Leftrightarrow a &= 4, 5\end{aligned}$$

である。

(iv)

表が出る確率および裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるから, コインを5回投げるときの表裏

の組合せは $2^5=32$ (通り)あり, これらはすべて同様に確からしい。表が2回以上連続して出ないのは以下の場合が考えられる。

[1] 表が1回も出ないとき

必ず条件を満たす。このようになる場合の数は1通りである。

[2] 表が1回だけ出るとき

必ず条件を満たす。このようになる場合の数は, 5回投げるときのどの1回が表かを考えて5通りである。

[3] 表が2回だけ出るとき

条件を満たすのは, 裏が出る3回の前後の4回から2回を選んでそこで1回ずつ表が出るときである。したがって, このようになる場合の数は,

$${}_4C_2=6 \text{ (通り)}$$

である。

[4] 表が3回だけ出るとき

表, 裏, 表, 裏, 表の順に出る1通りのみが条件を満たす。

以上, [1]~[4]より表が2回以上連続して出ない確率は

$$\frac{1+5+6+1}{32}=\frac{13}{32}$$

となる。

(v)

$m\geq 2$ で考える。自然数 m が現れるまでに1が1個, 2が3個, ..., $m-1$ が $2(m-1)-1$ 個出てくる。その直後に自然数 m が出てくるから, 自然数 m が初めて現れるのは

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1}(2k-1)+1 &= 2\cdot\frac{m(m-1)}{2}-(m-1)+1 \\ &= m^2-2m+2 \text{ (番目)}\end{aligned}$$

である。 $m=1$ を代入すると $m^2-2m+2=1$ であるから, これは $m=1$ でも成立する。よって, 自然数 m が初めて現れるのは第 m^2-2m+2 項である。また,

$$m^2-2m+2=(m-1)^2+1$$

であり,

$$(45-1)^2+1=1937$$

$$(46-1)^2+1=2026$$

である。したがって, $1937<2022<2026$ であるから, 第2022項は45である。

(vi)

データの値の平均が $\frac{4}{n}$, データの値の2乗の平均が $\frac{26}{n}$ と表せるから, 分散について

$$\frac{26}{n}-\left(\frac{4}{n}\right)^2=3$$

が成り立つ。これを解くと

$$\begin{aligned}26n-16 &= 3n^2 \\ \Leftrightarrow (n-8)(3n-2) &= 0 \\ \therefore n &= \frac{2}{3}, 8\end{aligned}$$

である。求める n は自然数であるから, $n=8$ である。

II.

(i)

辺 OA を 1:1 に内分する点が M であるから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}$$

である。また辺 OB を 1:2 に内分する点が N であるから

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3} \vec{b}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b}$$

(ii)

$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = t, \vec{a} \cdot \vec{b} = t \cos \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} &= \left(-\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{b} \right) \\ &= -\frac{1}{2} |\vec{a}|^2 + \frac{7}{6} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3} |\vec{b}|^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{6} t \cos \theta - \frac{1}{3} t^2 \\ &= -\frac{1}{6} (2t^2 - 7t \cos \theta + 3) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{6} (2t^2 - 7t \cos \theta + 3)$$

(iii)

$\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BM}$ のとき $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ である。よって

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} (2t^2 - 7t \cos \theta + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{2t^2 + 3}{7t} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \cos \theta = \frac{2t^2 + 3}{7t}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2t^2 + 3}{7t} \\ &= \frac{1}{7} \left(2t + \frac{3}{t} \right) \end{aligned}$$

であり、 t は正の実数であるから $2t > 0, \frac{3}{t} > 0$ である。よって、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{7} \left(2t + \frac{3}{t} \right) \\ &\geq \frac{2\sqrt{6}}{7} \end{aligned}$$

となる。等号成立条件は

$$\begin{aligned} 2t &= \frac{3}{t} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

である。 $0 < \frac{2\sqrt{6}}{7} < 1$ より $\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ は値としてとり得るから、 $\cos \theta$ の最小値は $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ であ

り、それを与える t の値は $\frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

$$(答) \quad \text{最小値: } \frac{2\sqrt{6}}{7}, t \text{ の値: } \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(v)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos \theta < 1$ である。今 $t > 0$ より $\frac{2t^2 + 3}{7t} > 0$ であるから、 $\frac{2t^2 + 3}{7t} < 1$ を解けばよ

い。 $t > 0$ の条件下でこれを解くと

$$\begin{aligned} \frac{2t^2 + 3}{7t} &< 1 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 3 &< 0 \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 3) &< 0 \\ \therefore \frac{1}{2} &< t < 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{1}{2} < t < 3$$

Ⅲ.

(i)

$y=x^2$ の両辺を x で微分すると

$$y'=2x$$

となる。よって $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y'=\sqrt{3}$ である。よって l の接線の傾きは $\sqrt{3}$ であり、 l と m は

直交するから、 m の傾きは $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ である。また、 m は点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ を通るので、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。よって $p=-\frac{\sqrt{3}}{3}, q=\frac{5}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad p=-\frac{\sqrt{3}}{3}, q=\frac{5}{4}$$

(ii)

$Q(a, 0)$ は直線 m 上の点であるから、直線の方程式に代入してとくと

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

(iii)

直線 m は点 P で直線 l に直交し、また点 Q を通る。したがって、点 Q と直線 l の距離は点 P と点 Q の距離に等しく、

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 0\right)^2} = \frac{3}{2}$$

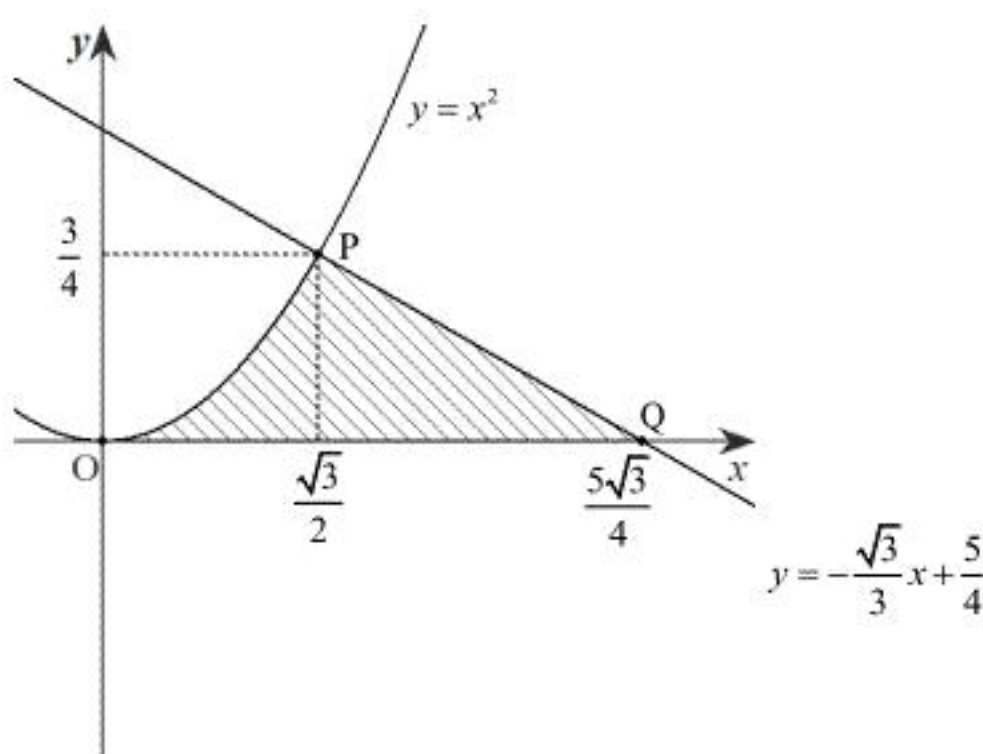
となる。よって、 Q を中心とする半径 r の円 D が l とただ1つの共有点を持つのは、 r が点 Q

と直線 l の距離に等しいとき、すなわち $r=\frac{3}{2}$ のときである。

$$(\text{答}) \quad r=\frac{3}{2}$$

(iv)

$x \geq 0, y \geq 0, y \leq px + q, y \leq x^2$ の表す領域は下図の斜線部である。ただし、境界を含む。



したがって、求める面積 S_1 は

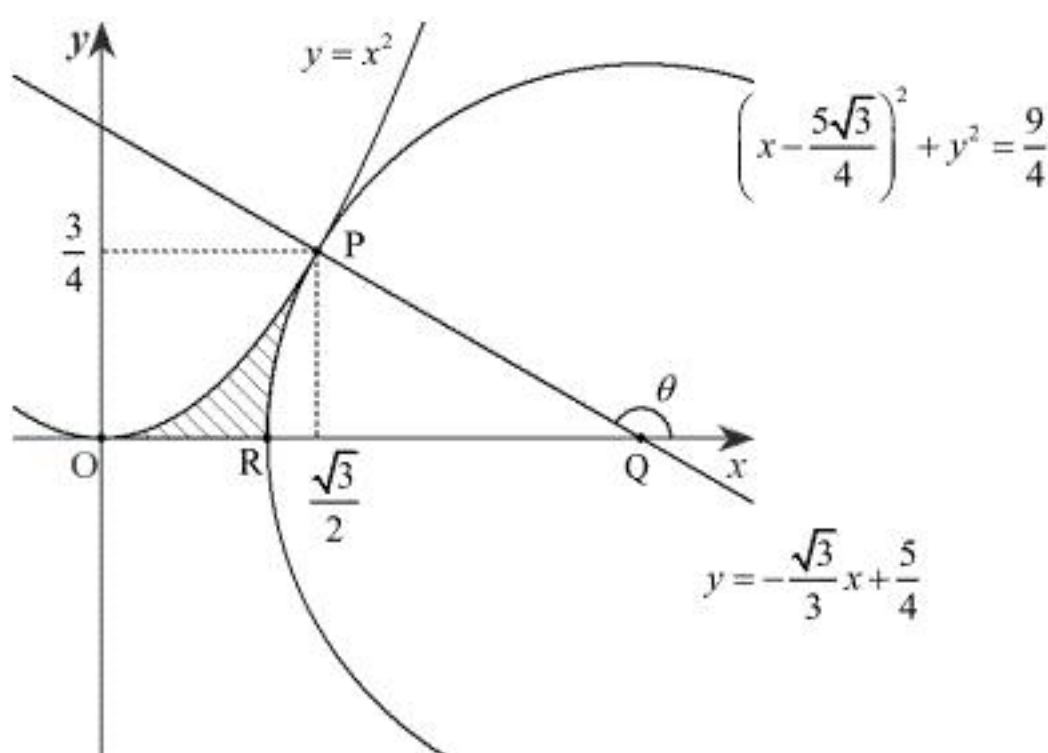
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \\ &= \frac{13\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{13\sqrt{3}}{32}$$

(v)

$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, y \geq 0, y \leq x^2, (x-a)^2 + y^2 \geq r^2$ の表す領域は下図の斜線部である。ただし、境界を含む。



円 D と x 軸の交点のうち、 x 座標の小さい方の点を R とすると、面積 S_2 は S_1 から扇形 QPR の面積を引いたものに等しい。今、直線 m と x 軸の正の方向とのなす角を θ ($0 \leq \theta < \pi$) とすると、傾きより

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

となる。したがって扇形 QPR の中心角 $\angle PQR$ は

$$\begin{aligned} \angle PQR &= \pi - \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。よって、扇形 QPR の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}\pi$$

である。したがって、求める面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{13\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{16}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_2 = \frac{13\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{16}\pi$$