

I.

〔解答〕

(i)	ア
	$(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ (複号同順)
(ii)	イ
	$x < 3$
(iii)	ウ
	15
(iv)	エ
	29
(v)	オ
	420
(vi)	カ
	$\frac{1}{3}n(n+1)$
(vii)	キ
	$\frac{1}{8}$

〔解説〕

(i)

$$(a+bi)^2=-4i$$

$$\Leftrightarrow a^2-b^2+2abi=-4i$$

となる。ここで実部と虚部を比較して、

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm b \\ ab=-2 \end{cases}$$

が得られる。 $a=b$ のとき、

$$b^2=-2$$

となるが、これを満たす実数 b は存在せず不適である。 $a=-b$ のとき、

$$b^2=2$$

$$\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{2}$$

となり、 $(a,b)=(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ (複号同順)が得られ、これが求める答えである。

(ii)

絶対値の中身の正負で場合分けをおこなう。

[1] $x \geq 0$ のとき

$$x|x|<2x+3$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x < 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) < 0$$

$$\therefore 0 \leq x < 3 \ (\because x \geq 0)$$

となる。

[2] $x < 0$ のとき

$$x|x|<2x+3$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-x) < 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+2 > 0$$

と変形できる。 $(x+1)^2+2 > 0$ は常に成立することから、 $x < 0$ を満たすすべての実数 x に

対して与式が成り立つ。

以上、[1],[2]より、求める解は $x < 3$ である。

(iii)

$\sqrt{n^2+15n+78}$ の整数部分が $n+7$ となるとき、

$$n+7 \leq \sqrt{n^2+15n+78} < n+8$$

を満たす。 $n+7 \geq 0$ すなわち $n \geq -7$ のもとで、各辺を2乗すると、

$$(n+7)^2 \leq n^2+15n+78 < (n+8)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2+14n+49 \leq n^2+15n+78 < n^2+16n+64$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -29 \leq n \\ 14 < n \end{cases}$$

$$\therefore 14 < n$$

となり、これは $n \geq -7$ を満たす。よって求める最小の整数 n は、 $n=15$ である。

(iv)

底を10とする 20^{22} の対数を取ると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 20^{22} &= 22 \log_{10} 20 \\ &= 22(\log_{10} 2 + \log_{10} 10) \\ &= 22(0.3010+1) \\ &= 28.622 \end{aligned}$$

となり、

$$28 \leq 28.622 < 29$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 10^{28} \leq \log_{10} 20^{22} < \log_{10} 10^{29}$$

$$\therefore 10^{28} \leq 20^{22} < 10^{29}$$

を満たす。よって、 20^{22} は29桁の整数である。

(v)

8人を2人、2人、2人、1人、1人の5組に分けると、2人の組、1人の組をそれぞれ区別する

分け方は

$$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040 \text{ (通り)}$$

である。したがって、組を区別せずに5組に分ける分け方は、重複を考えて、

$$\frac{5040}{3! \cdot 2!} = 420 \text{ (通り)}$$

である。

(vi)

データは $2n+1$ 個の連続する整数からなることから、平均値は整数でありその値を a とする

と、このデータは $a-n$ から $a+n$ までの連続した整数であることがわかる。よって、求める

分散を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=a-n}^{a+n} (k-a)^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^n k^2 \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=-n}^{-1} k^2 + 0^2 + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} \cdot 2 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3} n(n+1) \end{aligned}$$

と求められる。

(vii)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} &= \left| \overrightarrow{\text{OA}} \right| \left| \overrightarrow{\text{OB}} \right| \cos \angle \text{AOB} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。ここで、直線ABと直線ODは垂直に交わるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{OD}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{OB}} - \overrightarrow{\text{OA}}) \cdot \left\{ (1-t)\overrightarrow{\text{OA}} + t\overrightarrow{\text{OB}} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -(1-t) \left| \overrightarrow{\text{OA}} \right|^2 + (1-2t) \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}} + t \left| \overrightarrow{\text{OB}} \right|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(1-t) \cdot 1^2 + (1-2t) \cdot \frac{1}{2} + t \cdot 2^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ.

【解答】

(i) $X = \frac{1}{2}a, Y = \frac{1}{2}a^2, Z = \frac{1}{2}a$

(ii) $P = 2, Q = -1$

(iii)

三角形 ABD において、余弦定理より

$$\begin{aligned} b^2 &= 1^2 + a^2 - 2 \cdot 1 \cdot a \cdot \cos \theta \\ &= 1 + a^2 - 2a \cos \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。この式に(ii)で求めた $a = 2 \cos \theta - 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} b^2 &= 1 + (2 \cos \theta - 1)^2 - 2(2 \cos \theta - 1) \cos \theta \\ &= -2 \cos \theta + 2 \end{aligned}$$

となる。これを $b^2 = R \cos \theta + S$ から辺々引くと

$$(R+2) \cos \theta + (S-2) = 0$$

となる。ここで、 $R+2 \neq 0$ と仮定すると、

$$\cos \theta = -\frac{S-2}{R+2}$$

となり、 R, S が有理数より右边は常に有理数となるが、左辺は無理数もとることに矛盾する。よって背理法により $R+2=0$ となる。したがって $R=-2, S=2$ となる。

(答) $R=-2, S=2$

(iv)

BC=1 のとき、三角形 ABC は AB=BC(=1) の二等辺三角形であるので、

$$\angle BCA = \angle BAC = 2\theta$$

となる。また、三角形 ACD は AC=AD(=a) の二等辺三角形であるので、

$$\begin{aligned} \angle ADC &= \angle ACD \\ &= \angle BCA \\ &= 2\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、三角形 ACD について、三角形の内角の和は π になるので、

$$\begin{aligned} \angle ACD + \angle ADC + \angle CAD &= \pi \\ \Leftrightarrow 2\theta + 2\theta + \theta &= \pi \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

となり、これは $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす。また同様にして三角形 ABC について、

$$\begin{aligned} \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC &= \pi \\ \Leftrightarrow \angle ABC + 2\theta + 2\theta &= \pi \\ \therefore \angle ABC &= \frac{\pi}{5} \left(\because \theta = \frac{\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $\theta = \frac{\pi}{5}, \angle ABC = \frac{\pi}{5}$

(v)

(iv)より、三角形 ABD は $\angle DAB = \angle DBA (= \theta)$ より AD=BD の二等辺三角形であるので、

$$\begin{aligned} AD &= BD \\ \Leftrightarrow a &= b \\ \therefore a^2 &= b^2 \end{aligned}$$

が得られる。この式に(ii),(iii)で得られた $a = 2 \cos \theta - 1, b^2 = -2 \cos \theta + 2$ を代入すると、

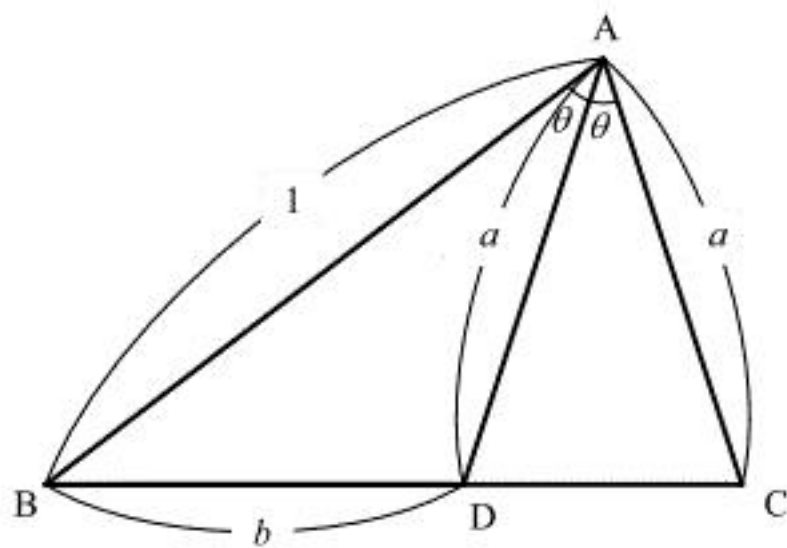
$$\begin{aligned} (2 \cos \theta - 1)^2 &= -2 \cos \theta + 2 \\ \Leftrightarrow 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ より $\frac{1}{2} < \cos \theta < 1$ であることと合わせて、 $\cos \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ と求められる。

(答) $\cos \theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

【解説】

(i)



三角形 ABD, 三角形 ACD, 三角形 ABC の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とおく。このとき、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} a \sin \theta \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \\ S_3 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2} a \sin 2\theta \end{aligned}$$

となるので、 $X = \frac{1}{2}a, Y = \frac{1}{2}a^2, Z = \frac{1}{2}a$ である。

(ii)

$S_3 = S_1 + S_2$ が成り立つので、(i)より

$$\begin{aligned} S_3 &= S_1 + S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} a \sin 2\theta &= \frac{1}{2} a \sin \theta + \frac{1}{2} a^2 \sin \theta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} a \sin \theta \cdot 2 \cos \theta &= \frac{1}{2} a (1 + a) \sin \theta \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ より $\sin \theta > 0$ であり、さらに $a > 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a \sin \theta \cdot 2 \cos \theta &= \frac{1}{2} a (1 + a) \sin \theta \\ \Leftrightarrow 2 \cos \theta &= 1 + a \\ \therefore a &= 2 \cos \theta - 1 \end{aligned}$$

が得られる。よって、 $P = 2, Q = -1$ である。

Ⅲ.

〔解答〕

(i) $f'(x) = 3px^2 - 12pax + 9pa^2$, $f'(x) = 0$ の解: $x = 3a, a$

(ii)

$a > 0, p > 0$ より, $f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4pa^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ここで, 問題文より $f(x)$ は極大値 $4a^2$ を取るので,

$$\begin{aligned} 4pa^3 &= 4a^2 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{1}{a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{a}$$

(iii)

3次関数 $f(x) = px(x-3a)^2$ は $-1 \leq x \leq 0$ の範囲において $f(x) \leq 0$ となるから, 求める面積 S

は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \left\{ -px(x-3a)^2 \right\} dx \\ &= -p \int_{-1}^0 (x^3 - 6ax^2 + 9a^2x) dx \\ &= -p \left[\frac{1}{4}x^4 - 2ax^3 + \frac{9}{2}a^2x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= p \left\{ \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - 2a \cdot (-1)^3 + \frac{9}{2}a^2 \cdot (-1)^2 \right\} \\ &= p \left(\frac{1}{4} + 2a + \frac{9}{2}a^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{4} + 2a + \frac{9}{2}a^2 \right) \\ &= \frac{9}{2}a + 2 + \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{9}{2}a + 2 + \frac{1}{4a}$$

(iv)

$a > 0$ より, $\frac{9}{2}a > 0, \frac{1}{4a} > 0$ である。よって, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned} S &\geq 2 + 2\sqrt{\frac{9}{2}a \cdot \frac{1}{4a}} \\ \Leftrightarrow S &\geq 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで等号成立条件は,

$$\begin{aligned} \frac{9}{2}a &= \frac{1}{4a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{1}{18} \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。以上より, S の最小値は $2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ で, それを与える a の値は $\frac{\sqrt{2}}{6}$ である。

$$(\text{答}) \quad S \text{ の最小値: } 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad a \text{ の値: } \frac{\sqrt{2}}{6}$$

〔解説〕

(i)

$$f(x) = px(x-3a)^2 = px^3 - 6pax^2 + 9pa^2x$$

より,

$$f'(x) = 3px^2 - 12pax + 9pa^2$$

となる。また, $f'(x) = 0$ の解は,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3p(x-3a)(x-a) &= 0 \\ \therefore x &= 3a, a \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

と求められる。