

I.

【解答】

(i)	ア	
	$\frac{1}{4} < x < 8$	
(ii)	イ	
	$\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$	
(iii)	ウ	
	7	
(iv)	エ	オ
	58	75
(v)	カ	
	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	

【解説】

(i)

真数条件より $x > 0$ である。このもとで、

$$\begin{aligned} & (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 < 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 2) < 0 \\ \Leftrightarrow & -2 < \log_2 x < 3 \\ \therefore & \frac{1}{4} < x < 8 \end{aligned}$$

であり、これは $x > 0$ を満たす。

(ii)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin x > 0, \cos x > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \\ \Leftrightarrow & \sin^2 x + \cos^2 x = 4 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow & 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \\ \Leftrightarrow & \sin 2x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ すなわち $0 < 2x < \pi$ であるので、

$$\begin{aligned} & \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \\ \therefore & x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

と求められる。

(iii)

$x^2 + xy + y^2$ の各項はすべて2次であるから、

$$(x^2 + xy + y^2)^3 = (x^2 + xy + y^2) \cdot (x^2 + xy + y^2) \cdot (x^2 + xy + y^2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

の展開式に現れる項はすべて6次である。よって、現れる項の候補は

$$x^6, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, xy^5, y^6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

の7種類ある。ここで、 $(x^2 + xy + y^2)^3$ の展開式に現れる項の x の次数にのみ着目する。

n_1, n_2, n_3 をそれぞれ①の右辺の各括弧の中の項の x の次数、つまり2, 1, 0のいずれかとする
と、展開式に現れる項の x の次数は $n_1 + n_2 + n_3$ と表せ、このとき

$$n_1 + n_2 + n_3 = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$$

となる。つまり x^2, xy, y^2 の組み合わせによって展開式の項に②はすべて現れる。以上より、

$(x^2 + xy + y^2)^3$ を展開したときの同類項は7種類ある。

(iv)

データは10個の数値からなっているので、中央値は5番目に大きい数値と6番目に大きい数値の平均、第3四分位数は3番目に大きい数値である。ここで、 a, b を除く8つのデータの中に第3四分位数に該当する75が存在しないことより、 $a = 75$ または $b = 75$ が必要である。このとき、数値が判明している9つのデータを小さい順に並べると、

$$26, 29, 34, 47, 62, 73, 75, 85, 91$$

となる。したがって、62は5番目に大きい数値あるいは6番目に大きい数値となるので、中央値が60であるためには $a = 58$ または $b = 58$ が必要である。以上より、 $a < b$ であるから $a = 58, b = 75$ が必要である。逆に $a = 58, b = 75$ のとき、中央値が60、第3四分位数が75であるので十分である。

(v)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\log(x+1)}{x^2} dx &= \left[-\frac{\log(x+1)}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx \\ &= -\frac{\log 3}{2} + \log 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= -\frac{\log 3}{2} + \log 2 + [\log x - \log(x+1)]_1^2 \\ &= -\frac{\log 3}{2} + \log 2 + (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) \\ &= -\frac{3\log 3}{2} + 3\log 2 \\ &= \log \frac{\sqrt{3}}{9} + \log 8 \\ &= \log \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

となる。よって、 $c = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ である。

II.

【解答】

$$(i) \quad P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

(ii)

$\cos \frac{-\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{-\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_n P_{n+1}} &= \left(\frac{1}{2^n} \cos \frac{(-1)^n \pi}{3}, \frac{1}{2^n} \sin \frac{(-1)^n \pi}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2^n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}, \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \end{aligned}$$

と変形できる。よって $n \geq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{P_k P_{k+1}} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1}, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}}, \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^n}, \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \right) \end{aligned}$$

となるから, $P_0 = (0, 0)$ より

$$x_n = 1 - \frac{1}{2^n}, y_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

である。これは $n=0$ でも成り立つ。

$$(答) \quad x_n = 1 - \frac{1}{2^n}, y_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(iv)

(ii)より, $n \geq 1$ において

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_{2n-1} P_{2n+1}} &= \left(\left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}} \right) - \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}} \right), \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n-1} \right\} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right), \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} (3, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} l_n &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2n+1} \cdot 2\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4^n} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad l_n = \frac{\sqrt{3}}{4^n}$$

(v)

(iv)より,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} l_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【解説】

(i)

$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \left(\frac{1}{2^n} \cos \frac{(-1)^n \pi}{3}, \frac{1}{2^n} \sin \frac{(-1)^n \pi}{3} \right)$ の式に $n=0, 1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_1} &= \left(\frac{1}{2^0} \cos \frac{(-1)^0 \pi}{3}, \frac{1}{2^0} \sin \frac{(-1)^0 \pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \overrightarrow{P_1 P_2} &= \left(\frac{1}{2^1} \cos \frac{(-1)^1 \pi}{3}, \frac{1}{2^1} \sin \frac{(-1)^1 \pi}{3} \right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

となるので,

$$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

と求められる。

(iii)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = 0$ より, (ii)の結果と合わせて,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

と求められる。

Ⅲ.

【解答】

$$(i) \quad (1-s+s\cos t, 1-3s+s\sin t, 1-s)$$

(ii)

実数 p を用いて、直線 AP 上にある点の座標は、 $(1-p+p\cos t, 1-3p+p\sin t, 1-p)$ と表すことができる。ここでこの点の y 座標が 0 になるとき、

$$\begin{aligned} 1-3p+p\sin t &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{1}{3-\sin t} \quad (\because 3-\sin t > 0) \end{aligned}$$

となる。この p を z 座標に代入したものが $f(t)$ になるので、

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{1}{3-\sin t} \\ &= \frac{2-\sin t}{3-\sin t} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(答) \quad f(t) = \frac{2-\sin t}{3-\sin t}$$

$$(iii) \quad g(t) = \frac{2+\sin t}{3+\sin t}$$

(iv)

(ii), (iii) より、

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - g(t) \\ &= \frac{2-\sin t}{3-\sin t} - \frac{2+\sin t}{3+\sin t} \\ &= \frac{(2-\sin t)(3+\sin t) - (2+\sin t)(3-\sin t)}{(3-\sin t)(3+\sin t)} \\ &= \frac{-2\sin t}{9-\sin^2 t} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{-2\cos t(9-\sin^2 t) - (-2\sin t) \cdot (-2\sin t \cos t)}{(9-\sin^2 t)^2} \\ &= \frac{-2\cos t(9+\sin^2 t)}{(9-\sin^2 t)^2} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad h'(t) = \frac{-2\cos t(9+\sin^2 t)}{(9-\sin^2 t)^2}$$

(v)

$0 \leq t \leq \pi$ において、 $h'(t) = 0$ のとき、 $\cos t = 0$ すなわち $t = \frac{\pi}{2}$ である。よって、 t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき、 $h(t)$ の増減表は以下の通りである。

t	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

以上より、 $h(t)$ は $t = \frac{\pi}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。

$$(答) \quad \text{増減表：上表、} h(t) \text{ の最小値：} -\frac{1}{4}$$

【解説】

(i)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OP} \\ &= (1-s)(1, 1, 1) + s(\cos t, -2+\sin t, 0) \\ &= (1-s+s\cos t, 1-3s+s\sin t, 1-s) \end{aligned}$$

より、 $R(1-s+s\cos t, 1-3s+s\sin t, 1-s)$ と表せる。

(iii)

直線 AQ 上にある点を S とおくと、点 S の座標は、実数 q を用いて、

$$(1-q)(1, 1, 1) + q(\cos t, -2-\sin t, 0) = (1-q+q\cos t, 1-3q-q\sin t, 1-q)$$

と表せる。ここで S の y 座標が 0 になるとき、

$$\begin{aligned} 1-3q-q\sin t &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{1}{3+\sin t} \quad (\because 3+\sin t > 0) \end{aligned}$$

となる。この q を z 座標に代入したものが $g(t)$ になるので、

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 - \frac{1}{3+\sin t} \\ &= \frac{2+\sin t}{3+\sin t} \end{aligned}$$

と求められる。

IV.

【解答】

(i) $a = -2t, b = -t^2 - 2, c = t^2$

(ii)

(i)で求めた円 C の方程式に $x = d, y = 1$ を代入すると,

$$d^2 + 1^2 - 2td - (t^2 + 2) \cdot 1 + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2dt - d^2 + 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{d^2 - 1}{2d} \quad (\because d \neq 0)$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{d^2 - 1}{2d}$$

(iii)

まず, $p = 0$ のとき円 C の方程式に $x = 0, y = 1$ を代入して,

$$0^2 + 1^2 - 2t \cdot 0 - (t^2 + 2) \cdot 1 + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 = 0$$

となり不適である。よって $p \neq 0$ である。逆に $p \neq 0$ のとき, (ii)より $t = \frac{p^2 - 1}{2p}$ となり, t は存在する。よって, 求める必要十分条件は, $p \neq 0$ である。

$$(\text{答}) \quad p \neq 0$$

(iv)

円 C の方程式に $x = q, y = r$ を代入して,

$$q^2 + r^2 - 2tq - (t^2 + 2)r + t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (r-1)t^2 + 2qt - (q^2 - 2r + r^2) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり, ①を満たす実数 t が存在する条件が求める必要十分条件になる。まず $r = 1$ のとき,

(iii)より必要十分条件は $q \neq 0$ である。 $r \neq 1$ のとき, ①の判別式を D とおくと, 求める必要十分条件は,

$$\frac{D}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q^2 + (r-1)(q^2 - 2r + r^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow rq^2 + r(r-1)(r-2) \geq 0$$

$$\therefore q^2 + \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \quad (\because r > 0)$$

となる。以上をまとめて, 求める必要十分条件は, $r > 0$ かつ $(q, r) \neq (0, 1)$ かつ

$$q^2 + \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4} \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad r > 0 \text{ かつ } (q, r) \neq (0, 1) \text{ かつ } q^2 + \left(r - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

【解説】

(i)

C は点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2 + 1\right)$ を中心とし, x 軸に接するので, 半径は $\frac{1}{2}t^2 + 1$ である。よって, 円 C の方程式は,

$$(x-t)^2 + \left\{y - \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)\right\}^2 = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2tx - (t^2 + 2)y + t^2 = 0$$

と求められる。以上より, $a = -2t, b = -t^2 - 2, c = t^2$ である。