

2022年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に**氏名**のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 0 でない実数 x, y が

$$x + y = 2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとき、 $|x - y| =$ ア である。

(ii) 等式 $|x - |x - 2|| = 1$ を満たす実数 x をすべて求めると $x =$ イ である。

(iii) a を定数とする。3 次式 $F(x) = x^3 - 6x + a$ を 2 次式 $G(x) = x^2 - 3x + 2$ で割った余りを $R(x)$ とする。 $G(x)$ が $R(x)$ で割り切れるような a の値をすべて求めると $a =$ ウ である。

(iv) コインを 5 回投げるとき、表が 2 回以上連続して出ない確率は エ である。

ただし、コインを 1 回投げたとき、表が出る確率および裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする。

(v) 自然数 n が $2n - 1$ 個続く、初項が 1 の次のような数列がある。

$\underbrace{1}_{1\text{個}}, \underbrace{2, 2, 2}_{3\text{個}}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3}_{5\text{個}}, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4}_{7\text{個}}, 5, \dots$

このとき、自然数 m が初めて現れるのは第 オ 項である。また、第 2022 項は カ である。

(vi) n 個の値からなるデータがあり、データの値の総和が 4、データの値の 2 乗の総和が 26、データの分散が 3 であるとする。このとき、データの個数 n は キ である。

Ⅱ. t を正の実数とする。 $OA = 1$, $OB = t$ である三角形 OAB において, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\angle AOB = \theta$ とおく。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。また, 辺 OA の中点を M , 辺 OB を $1:2$ に内分する点を N とする。このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には, (i) ~ (iii) については答えのみを, (iv), (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) $\overrightarrow{AN}$ と $\overrightarrow{BM}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

(ii) 内積 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM}$ を t と $\cos \theta$ を用いて表せ。

(iii) $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BM}$ であるとき, $\cos \theta$ を t を用いて表せ。

(iv) $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BM}$ であるとき, $\cos \theta$ の最小値とそれを与える t の値をそれぞれ求めよ。

(v) $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BM}$ となる θ が存在する t の値の範囲を求めよ。

Ⅲ. O を原点とする座標平面上の放物線 $C: y = x^2$ と C 上の点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ がある。

P における C の接線を l とし、また、 P を通り l と直交する直線を m とする。さらに、 m と x 軸の交点を Q とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i)、(ii) については答えのみを、(iii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) m の方程式を $y = px + q$ とするとき、定数 p, q の値を求めよ。

(ii) Q の座標を $(a, 0)$ とするとき、 a の値を求めよ。

(iii) Q を中心とする半径 r の円 D が l とただ 1 つの共有点を持つとき、 r の値を求めよ。

(iv) (i) で定めた p, q の値に対して、次の連立不等式の表す領域の面積 S_1 を求めよ。

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq px + q, y \leq x^2$$

(v) (ii) で定めた a の値と (iii) で定めた r の値に対して、次の連立不等式の表す領域の面積 S_2 を求めよ。

$$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, y \geq 0, y \leq x^2, (x - a)^2 + y^2 \geq r^2$$

【以下余白】

