

2022年度

A_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～クにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 実数 x に関する方程式 $2\log(1-x) - \log(5-x) = \log 2$ を解くと、
 $x =$ である。

(ii) 下図のように 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記入された、9 枚のカードがある。

これら 9 枚のカードから同時に取り出した 3 枚のカードの数字の積が、10 で割り切れる確率は である。

(iii) 三角形 ABC において、 $AB = 5$ 、 $AC = 6$ で、角 A の大きさは $\frac{\pi}{3}$ であるとする。
A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。このとき、 $BH : CH =$: である。

(iv) 2 次方程式 $2x^2 + 4x + 1 = 0$ の解を α 、 β ($\alpha < \beta$) とする。実数 p 、 q に対して、2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が α^3 、 β^3 であるならば、 $p =$,
 $q =$ である。

(v) $a < b$ を満たす自然数の組 a 、 b の和が 119、最小公倍数が 462 であるとき、
 $a =$, $b =$ である。

Ⅱ．実数 x に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xe^{-x}$$

により定める。座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ に関して、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。
解答欄には (i), (ii), (iv) については答えのみを、(iii), (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め、 $f(x)$ の増減表を書け。ただし、極値も増減表に記入すること。
- (ii) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求め、 C の変曲点の座標を求めよ。
- (iii) C の変曲点と、座標平面上の原点を通る直線を l とする。 C と l で囲まれた領域の面積 S を求めよ。
- (iv) a, b, c を定数とし、関数 $g(x)$ を $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ と定める。
 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ が $g'(x) = x^2e^{-2x}$ を満たすとき、 a, b, c の値を求めよ。
- (v) C と (iii) で定めた l で囲まれた領域を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

Ⅲ. t を正の実数とする。座標平面上に放物線 $C_1: y = x^2$ と、その上の点 $P(t, t^2)$ がある。Pにおける C_1 の接線を l とし、法線を m とする。 l と x 軸との交点を Q とする。Pにおいて l に接し、さらに x 軸にも接する円で、中心の x 座標が t 以下であるものを C_2 とする。 C_2 の中心を A とし、 C_2 と x 軸の接点を B とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i), (ii) については答えのみを、(iii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) l の方程式を求めよ。

(ii) m の方程式を求めよ。

(iii) $\angle BAP = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 t の値を求めよ。

(iv) (iii) のとき、 A の座標を求めよ。

(v) (iii) のとき、四角形 $ABQP$ の面積 S を求めよ。

IV. 複素数

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$$

に対して、複素数 z_n を

$$z_n = 8\alpha^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。ただし、 i は虚数単位とする。複素数平面において、原点を O とし、 z_n が表す点を P_n とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) α の絶対値 $|\alpha|$ と偏角 $\arg \alpha$ をそれぞれ求めよ。ただし、 $0 \leq \arg \alpha < 2\pi$ とする。
- (ii) z_2, z_3 の実部と虚部をそれぞれ求めよ。
- (iii) z_n の極形式を n を用いて表せ。
- (iv) O, P_n, P_{n+1} を頂点とする三角形の面積 S_n を n を用いて表せ。
- (v) (iv) で定めた S_n に対して、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ。

【以下余白】

