

2022年度

A_b 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべてH Bの黒鉛筆またはH Bの黒のシャープペンシルで記入することになっています。H Bの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はI～IIIとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～クにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 実数 x に関する方程式 $2 \log(1 - x) - \log(5 - x) = \log 2$ を解くと,

$x = \boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) 下図のように 1 から 9 までの数字が 1 つずつ記入された, 9 枚のカードがある。

1 2 3 4 5 6 7 8 9

これら 9 枚のカードから同時に取り出した 3 枚のカードの数字の積が, 10 で割り切れる確率は イ である。

(iii) 三角形 ABCにおいて, $AB = 5$, $AC = 6$ で, 角 A の大きさは $\frac{\pi}{3}$ であるとする。

A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。このとき, $BH : CH = \boxed{\text{ウ}} : \boxed{\text{エ}}$ である。

(iv) 2 次方程式 $2x^2 + 4x + 1 = 0$ の解を α , β ($\alpha < \beta$) とする。実数 p , q に対して,

2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が α^3 , β^3 であるならば, $p = \boxed{\text{オ}}$,

$q = \boxed{\text{カ}}$ である。

(v) $a < b$ を満たす自然数の組 a , b の和が 119, 最小公倍数が 462 であるとき,

$a = \boxed{\text{キ}}$, $b = \boxed{\text{ク}}$ である。

II. 実数 x に対し, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xe^{-x}$$

により定める。座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ について, 次の問(i)~(v)に答えよ。
解答欄には(i), (ii), (iv)については答えのみを, (iii), (v)については答えだけではなく途中経過も書くこと。

(i) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $f(x)$ の増減表を書け。ただし, 極値も増減表に記入すること。

(ii) $f(x)$ の第2次導関数 $f''(x)$ を求め, C の変曲点の座標を求めよ。

(iii) C の変曲点と, 座標平面上の原点を通る直線を l とする。 C と l で囲まれた領域の面積 S を求めよ。

(iv) a, b, c を定数とし, 関数 $g(x)$ を $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ と定める。

$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ が $g'(x) = x^2e^{-2x}$ を満たすとき, a, b, c の値を求めよ。

(v) C と(iii)で定めた l で囲まれた領域を, x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

III. t を正の実数とする。座標平面上に放物線 $C_1 : y = x^2$ と、その上の点 $P(t, t^2)$ がある。 P における C_1 の接線を l とし、法線を m とする。 l と x 軸との交点を Q とする。 P において l に接し、さらに x 軸にも接する円で、中心の x 座標が t 以下であるものを C_2 とする。 C_2 の中心を A とし、 C_2 と x 軸の接点を B とする。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i), (ii)については答えのみを、(iii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) l の方程式を求めよ。

(ii) m の方程式を求めよ。

(iii) $\angle BAP = \frac{\pi}{3}$ であるとき、 t の値を求めよ。

(iv) (iii)のとき、 A の座標を求めよ。

(v) (iii)のとき、四角形 $ABQP$ の面積 S を求めよ。

【以下余白】

