

2022年度

C_a 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBの黒のシャープペンシル**で記入することになっています。HBの黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号は**I～IV**となっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～カにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 不等式 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 < 0$ を満たす実数 x の範囲は ア である。

(ii) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ かつ、

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4$$

を満たす x の値をすべて求めると、 $x =$ イ である。

(iii) 式 $(x^2 + xy + y^2)^3$ を展開したときの同類項は ウ 種類ある。

(iv) $a < b$ とする。 a, b を含む 10 個の数値からなるデータがある。

34, 29, 85, 26, 73, 62, 91, 47, a, b

このデータについて、中央値が 60、第 3 四分位数が 75 であるとき、 $a =$ エ ,

$b =$ オ である。

(v) 等式 $\int_1^2 \frac{\log(x+1)}{x^2} dx = \log c$ を満たす実数 c を求めると、 $c =$ カ である。

Ⅱ. 座標平面上の原点を $P_0(0, 0)$ と書く。点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ を

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \left(\frac{1}{2^n} \cos \frac{(-1)^n \pi}{3}, \frac{1}{2^n} \sin \frac{(-1)^n \pi}{3} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすように定める。 P_n の座標を $(x_n, y_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$ とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i), (iii) については答えのみを、(ii), (iv), (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) P_1, P_2 の座標をそれぞれ求めよ。

(ii) x_n, y_n をそれぞれ n を用いて表せ。

(iii) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ をそれぞれ求めよ。

(iv) ベクトル $\overrightarrow{P_{2n-1} P_{2n+1}}$ の大きさを $l_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ とするとき、 l_n を n を用いて表せ。

(v) (iv) の l_n について、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ の和 S を求めよ。

Ⅲ. t を実数とする。座標空間内の xy 平面上で、点 $(0, -2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 C 上の点 $P(\cos t, -2 + \sin t, 0)$ および点 $Q(\cos t, -2 - \sin t, 0)$ をとる。点 $A(1, 1, 1)$ と P を通る直線を l 、 A と Q を通る直線を m とする。このとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i), (iii) については答えのみを、(ii), (iv), (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) $0 < s < 1$ とする。線分 AP を $s : (1 - s)$ に内分する点を R とする。 R の座標を s, t を用いて表せ。

(ii) l と xz 平面との交点の z 座標を $f(t)$ とする。 $f(t)$ を求めよ。

(iii) m と xz 平面との交点の z 座標を $g(t)$ とする。 $g(t)$ を求めよ。

(iv) (ii), (iii) で定めた $f(t), g(t)$ に対し、 $h(t) = f(t) - g(t)$ と定める。 $h(t)$ の導関数 $h'(t)$ を求めよ。

(v) t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲を動くとき、(iv) で定めた $h(t)$ の増減表を書き、 $h(t)$ の最小値を求めよ。

IV. t を実数とする。座標平面上に放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ がある。放物線上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2 + 1\right)$ を中心とし、 x 軸に接する円を C とする。このとき、次の問(i)～(iv)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(iv)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) C の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ と表すとき、実数 a, b, c を t を用いて表せ。

(ii) d を 0 でない実数とする。 C が点 $(d, 1)$ を通るときの t の値を d を用いて表せ。

(iii) p を実数とする。 C が点 $(p, 1)$ を通るような t が存在するための、 p についての必要十分条件を求めよ。

(iv) q, r を実数とし、 $r > 0$ とする。 C が点 (q, r) を通るような t が存在するための、 q と r についての必要十分条件を求めよ。

【以下余白】

