

I

【解答】

(i)	ア
	−9
(ii)	イ
	$-\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5}$
(iii)	ウ
	$\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$
(iv)	エ
	$\frac{7}{18}$
(v)	オ
	$-\frac{1}{7}$
(vi)	カ
	x^2+1
(vii)	キ
	$(-1, 4), \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

【解説】

(i)

$t = \sin \theta$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ である。 y は t を用いて

$$\begin{aligned} y &= 4(1 - \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta - 5 \\ &= -4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 1 \\ &= -4t^2 - 4t - 1 \\ &= -4\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

と表される。これは、 $t = -\frac{1}{2}$ を軸とする、上に凸の放物線の式であるから、 y は $t = 1$ のとき

最小値 -9 をとる。

(ii)

$x^2 + y^2 = 1$ を満たす実数 x, y は実数 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ とおける。このとき、

$$\begin{aligned} z &= 2x + y \\ &= 2 \cos \theta + \sin \theta \\ &= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 α は $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす実数である。2 つの実数 x, y が

$x^2 + y^2 = 1$ を満たしながら動くとき、 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を動くため、 $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ である。したがって、 z のとりうる値の範囲は

$$-\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5}$$

である。

(iii)

$\triangle ABC$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{4^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 4} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle APC$ について余弦定理より、

$$\begin{aligned} CP^2 &= AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ \Leftrightarrow 25 &= AP^2 + 16 + AP \\ \Leftrightarrow AP^2 + AP - 9 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $x^2 + x - 9 = 0$ の解は $x = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$ であり、 $AP > 0$ より、 $AP = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$ である。

(iv)

さいころの出る目の組は $6^2 = 36$ 通りあり、これらは同様に確からしい。 a, b の組を (a, b) と

表すことにすると、 $\frac{a}{b}$ が整数になるような (a, b) は、以下の 14 通りである。

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), \\ (3, 3), (6, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

したがって、 $\frac{a}{b}$ が整数になる確率は $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$ である。

(v)

平面 OAB 上に点 C があるとき、 $\overrightarrow{OC}$ は実数 u, v を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= u \cdot \overrightarrow{OA} + v \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= (u + 2v, -v, 2u) \end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{OC} = (1 + t, t, 1 - t)$ であり、これらが一致するため、

$$\begin{cases} 1 + t = u + 2v \\ t = -v \\ 1 - t = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{4}{7} \\ v = \frac{1}{7} \\ t = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

を得る。したがって、 $t = -\frac{1}{7}$ である。

(vi)

$f(x)$ は 2 次式であるため、実数 a, b, c を用いて

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

とおける。ただし、 $a \neq 0$ である。このとき、左辺について

$$f(f(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c$$

となる。また、右辺について

$$f(x)^2 + 1 = (ax^2 + bx + c)^2 + 1$$

となる。これらが x について恒等的に等しいため、係数を比較する。まず x^4 の係数を比較すると $a^3 = a^2$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 \\ \Leftrightarrow a^2(a - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, 1 \end{aligned}$$

であり、 $a \neq 0$ であるから、 $a = 1$ である。したがって

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(x)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (x^2 + bx + c)^2 + b(x^2 + bx + c) + c &= (x^2 + bx + c)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow b(x^2 + bx + c) + c &= 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$ の x^2 の係数を比較すると $b = 0$ が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow 0 + c &= 1 \\ \Leftrightarrow c &= 1 \end{aligned}$$

が求まる。ゆえに、 $f(x) = x^2 + 1$ である。

(vii)

集合 A, B, C について、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ が成り立つ。 $A \cap C$ に属する点は、 xy 平面上の直線 $y = -2x + 2$ と直線 $y = -x + 3$ の $x < 0$ における交点である。その x 座標は、

$$\begin{aligned} -2x + 2 &= -x + 3 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \end{aligned}$$

となり、これは $x < 0$ を満たす。よって、座標は $(-1, 4)$ である。また、 $B \cap C$ に属する点は、 xy 平面上の直線 $y = 2x + 2$ と直線 $y = -x + 3$ の $x \geq 0$ における交点である。その x 座標は、

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= -x + 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、これは $x \geq 0$ を満たす。よって座標は $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ である。ゆえに、 $(A \cup B) \cap C$ に属する

点の座標は $(-1, 4), \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ である。

Ⅱ

〔解答〕

(i) $S_1 = 108, S_2 = 129.6$

(ii) $S_{n+1} = 1.08(S_n + 12)$

(iii)

特性方程式 $c = 1.08(c + 12)$ の解は $c = -162$ であるため、(ii) の漸化式は

$$S_{n+1} + 162 = 1.08(S_n + 162)$$

と変形できる。したがって、

$$S_n + 162 = (1.08)^{n-1} \cdot (S_1 + 162)$$

$$\Leftrightarrow S_n = 270 \cdot (1.08)^{n-1} - 162$$

となる。

(答) $S_n = 270 \cdot (1.08)^{n-1} - 162$

(iv)

$$\begin{aligned} \log_{10} 1.08 &= \log_{10} \frac{108}{100} \\ &= \log_{10} 108 - \log_{10} 100 \\ &= \log_{10} 2^2 \cdot 3^3 - 2 \\ &= 2 \log_{10} 2 + 3 \log_{10} 3 - 2 \\ &= 0.0333 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0.0333

(v)

$$S_n > 513$$

$$\Leftrightarrow 270 \cdot (1.08)^{n-1} - 162 > 513$$

$$\Leftrightarrow (1.08)^{n-1} > \frac{675}{270} = 2.5$$

であり、両辺に対して底を 10 とした対数をとると、 $10 > 1$ より、

$$(n-1) \log_{10} 1.08 > \log_{10} 2.5 \text{ が導ける。ここで、}$$

である。したがって、

$$(n-1) \log_{10} 1.08 > \log_{10} 2.5$$

$$\Leftrightarrow n-1 > \frac{0.3980}{0.0333}$$

となる。 $\frac{0.3980}{0.0333} = 11 + \frac{317}{333}$ より $11 < \frac{0.3980}{0.0333} < 12$ であるため、上式を満たす最小の自然数 n は

13 である。ゆえに、 $S_n > 513$ を満たす最小の自然数 n は 13 である。

(答) 13

〔解説〕

(i)

$$S_1 = 100 \cdot (1 + 0.08)$$

$$= 108$$

$$S_2 = (108 + 12) \cdot (1 + 0.08)$$

$$= 129.6$$

である。

(ii)

$n+1$ 年目の終わりの利子が加算される前の預金額は $(S_n + 12)$ 万円であり、これに利子が加算されるため、

$$S_{n+1} = (S_n + 12) \cdot (1 + 0.08)$$

$$= 1.08(S_n + 12)$$

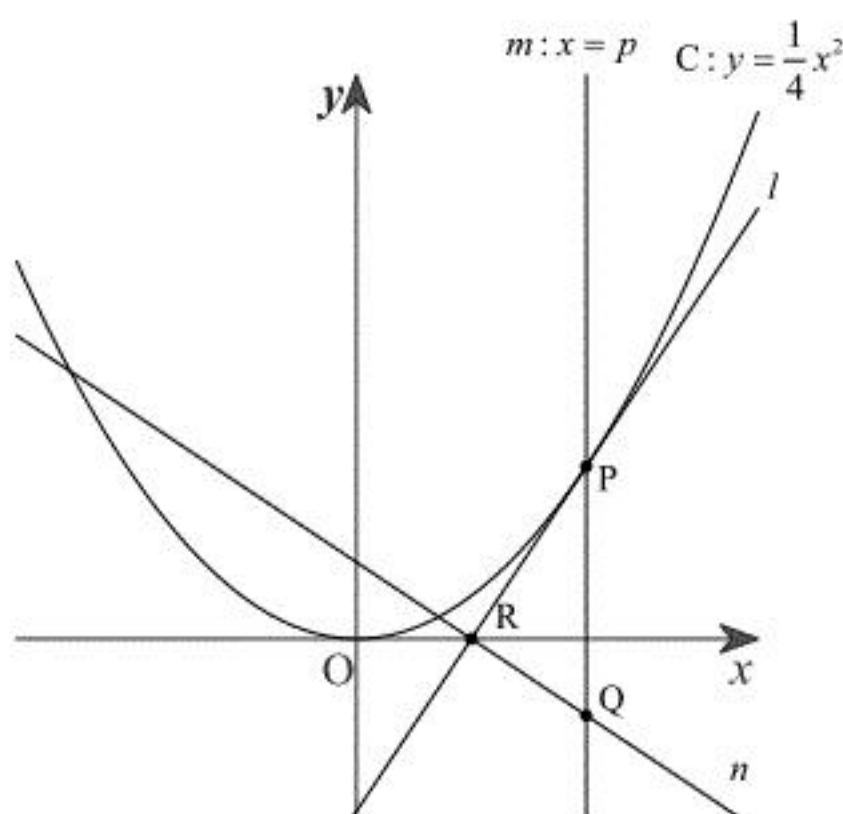
である。

Ⅲ

〔解答〕

$$(i) \quad y = \frac{1}{2}px - \frac{1}{4}p^2$$

(ii)



n は l に垂直な直線であり、かつ $p \neq 0$ であるため、傾きは $-\frac{2}{p}$ である。また、 n は $Q(p, -1)$ を通るため、 n の方程式は

$$y = -\frac{2}{p}(x-p) - 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{p}x + 1$$

である。R は n と l との交点であるため、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}px - \frac{1}{4}p^2 \\ y = -\frac{2}{p}x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

となることから、R の座標は $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad n: y = -\frac{2}{p}x + 1, R\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

(iii)

S の座標を実数 a, b を用いて $S(a, b)$ とおく。S は l に関して Q と対称な点であり、R は Q から l に下ろした垂線の足であるため、2 点 S, Q の中点は R と一致する。したがって、

$$\begin{cases} \frac{a+p}{2} = \frac{p}{2} \\ \frac{b-1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

となる。ゆえに、S の座標は $S(0, 1)$ である。

$$(\text{答}) \quad S(0, 1)$$

(iv)

m は 2 点 P, Q を通る直線であり、S は l に関して Q と対称であるから、 m' は 2 点 P と S を通る直線である。したがって、 m' の方程式は

$$y = \frac{\frac{1}{4}p^2 - 1}{p - 0}x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{p^2 - 4}{4p}x + 1$$

となる。 m' と C の交点の x 座標は、

$$\frac{p^2 - 4}{4p}x + 1 = \frac{1}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{p^2 - 4}{p}x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-p)\left(x + \frac{4}{p}\right) = 0$$

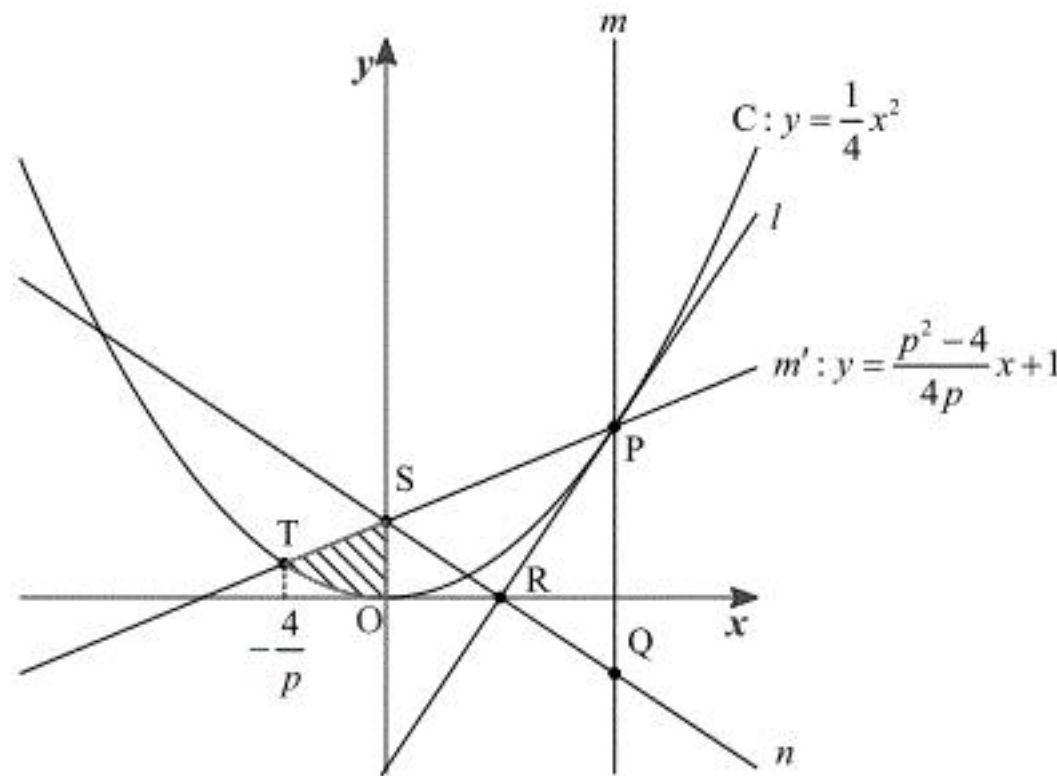
$$\therefore x = p, -\frac{4}{p}$$

である。P の x 座標は p であるため、T の x 座標は $-\frac{4}{p}$ である。

$$(\text{答}) \quad m': y = \frac{p^2 - 4}{4p}x + 1, \text{ T の } x \text{ 座標: } -\frac{4}{p}$$

(v)

線分 ST、線分 OS、および C で囲まれた部分は下図の斜線部である。



斜線部の面積は、

$$\int_{-\frac{4}{p}}^0 \left(\frac{p^2 - 4}{4p}x + 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = -\frac{1}{4} \int_{-\frac{4}{p}}^0 \left(x^2 - \frac{p^2 - 4}{p}x - 4 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{p^2 - 4}{2p}x^2 - 4x \right]_{-\frac{4}{p}}^0$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{64}{3p^3} - \frac{8(p^2 - 4)}{p^3} + \frac{16}{p} \right\}$$

$$= \frac{6p^2 + 8}{3p^3}$$

となる。ゆえに、斜線分の面積は $\frac{6p^2 + 8}{3p^3}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{6p^2 + 8}{3p^3}$$

〔解説〕

(i)

$y = \frac{1}{4}x^2$ の両辺を x で微分すると $y' = \frac{1}{2}x$ となるため、点 P における接線 l の傾きは $\frac{1}{2}p$ である。したがって、 l の方程式は

$$y = \frac{1}{2}p(x-p) + \frac{1}{4}p^2$$

$$= \frac{1}{2}px - \frac{1}{4}p^2$$

である。