

I

【解答】

|         |                                           |              |
|---------|-------------------------------------------|--------------|
| ( i )   | <div>ア</div>                              |              |
|         | $-\frac{2}{3}$                            |              |
| ( ii )  | <div>イ</div>                              |              |
|         | $2023x+1$                                 |              |
| ( iii ) | <div>ウ</div>                              |              |
|         | 6                                         |              |
| ( iv )  | <div>エ</div>                              |              |
|         | $\left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{3}\right)$ |              |
| ( v )   | <div>オ</div>                              | <div>カ</div> |
|         | -1                                        | 0            |
| ( vi )  | <div>キ</div>                              |              |
|         | $8\sqrt{2}$                               |              |
| ( vii ) | <div>ク</div>                              |              |
|         | $3m$                                      |              |

【解説】

( i )

△ABDに余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}BD^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos A \\ &= 13 - 12 \cos A\end{aligned}$$

となる。四角形 ABCD は円に内接するから、 $A + C = 180^\circ$  より  $\cos C = -\cos A$  が成立する。ゆえに △BCD に余弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned}BD^2 &= 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos C \\ &= 61 + 60 \cos A\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}13 - 12 \cos A &= 61 + 60 \cos A \\ \Leftrightarrow \cos A &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。

( ii )

$$\begin{aligned}(x+1)^{2023} &= \sum_{k=0}^{2023} {}_{2023}C_k \cdot x^k \cdot 1^{2023-k} \\ &= 1 + 2023x + \sum_{k=2}^{2023} {}_{2023}C_k \cdot x^k\end{aligned}$$

と書ける。 $k \geq 2$  のとき、 ${}_{2023}C_k \cdot x^k$  は  $x^2$  で割り切れるため、 $(x+1)^{2023}$  を  $x^2$  で割った余りは  $2023x+1$  である。

( iii )

$$\begin{aligned}1-a &= 1 - \log_6 2 \\ &= \log_6 3\end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-a} &= \frac{1}{\log_6 3} \\ &= \frac{1}{\frac{\log_3 3}{\log_3 6}} \\ &= \log_3 6\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}3^{\frac{1}{1-a}} &= 3^{\log_3 6} \\ &= 6\end{aligned}$$

である。

( iv )

線分 OA の傾きは  $\frac{1}{2}$  であるため、線分 OA の垂線の傾きは  $-2$  である。また、線分 OA の中点の座標は  $(2, 1)$  である。したがって、線分 OA の垂直二等分線の式は

$$\begin{aligned}y &= -2(x-2)+1 \\ &= -2x+5\end{aligned}$$

である。線分 OB についても同様に、線分 OB の傾きは  $-1$  であるため、線分 OB の垂線の傾きは  $1$  である。また、線分 OB の中点の座標は  $(-3, 3)$  である。したがって、線分 OB の垂直二等分線の式は

$$\begin{aligned}y &= (x+3)+3 \\ &= x+6\end{aligned}$$

となる。外心はこの 2 つの垂直二等分線の交点であるため、その座標は、

$$\begin{aligned}\begin{cases} y = x+6 \\ y = -2x+5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{17}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

より、 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{3}\right)$  である。

( v )

$$\begin{aligned}z^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 (\sqrt{3}+i)^3 \\ &= \frac{1}{8} \left( \sqrt{3}^3 + 3 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot i + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2 + i^3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i) \\ &= i\end{aligned}$$

となるから、 $z^6 = (z^3)^2 = -1$  である。ゆえに  $a = -1, b = 0$  である。

( vi )

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 25 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

であるから、 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 17$  より  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$  である。以上より、求める面積は

$$\begin{aligned}2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} &= \sqrt{9 \cdot 16 - 16} \\ &= 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。

( vii )

与えられた漸化式より、自然数  $k$  に対して

$$a_k + a_{k+1} = 3$$

が成立する。ここで、自然数  $n$  が偶数であるか奇数であるかで場合分けを行う。

[1]  $n$  が偶数である場合

このとき、 $n = 2m$  と書ける。したがって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-1} + a_{2m}) \\ &= 3 + 3 + \cdots + 3 \\ &= 3m\end{aligned}$$

となる。

[2]  $n$  が奇数である場合

このとき、 $n = 2m+1$  と書ける。 $m \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{2m} + a_{2m+1}) \\ &= 0 + 3 + 3 + \cdots + 3 \\ &= 3m\end{aligned}$$

であり、 $m = 0$  のとき

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 = 0$$

となる。よって  $n$  が奇数の場合はまとめて

$$\sum_{k=1}^n a_k = 3m$$

と表せる。

以上、[1], [2]より、いずれの場合も

$$\sum_{k=1}^n a_k = 3m$$

となる。

## Ⅱ

【解答】

(i)  $\frac{1}{27}$

(ii)

1回目のじゃんけんてAを含む2人が勝つのは、Aが出した手に対して、B, C, Dのうち1人がAと同じ手を出し、他2人がそれに負ける手を出す場合である。B, C, Dのうち1人を選ぶ選び方は ${}_3C_1$ 通りであるため、その確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

である。

(答)  $\frac{1}{9}$

(iii)

1回目のじゃんけんてAを含む3人が勝つのは、Aが出した手に対して、B, C, Dのうち2人がAと同じ手を出し、他1人がそれに負ける手を出す場合である。B, C, Dのうち2人を選ぶ選び方は ${}_3C_2$ 通りであるため、その確率は

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

である。1回目のじゃんけんてAが勝者に含まれる事象は、1回目のじゃんけんてAだけが勝つ事象、Aを含む2人だけが勝つ事象、Aを含む3人が勝つ事象の和事象である。これらの事象は互いに排反であるから、1回目のじゃんけんてAが勝者に含まれる確率は、

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

である。

(答)  $\frac{7}{27}$

(iv)

1回目のじゃんけんてあいこになる事象の余事象を考える。1回目のじゃんけんてあいこにならないのは、Aが勝つときか、Aが負けるときのいずれかである。Aが勝つ確率は(iii)より $\frac{7}{27}$ である。Aが負ける確率も、対称性により(iii)と同じく $\frac{7}{27}$ である。よって、あいこにならない確率は

$$\frac{7}{27} + \frac{7}{27} = \frac{14}{27}$$

であるから、1回目のじゃんけんてあいこになる確率は

$$1 - \frac{14}{27} = \frac{13}{27}$$

である。

(答)  $\frac{13}{27}$

(v)

2回目のじゃんけんてゲームが終了するのは、1回目のじゃんけんてあいこになり、2回目のじゃんけんてあいこにならないときである。したがって、その確率は

$$\frac{13}{27} \cdot \frac{14}{27} = \frac{182}{729}$$

である。

(答)  $\frac{182}{729}$

【解説】

(i)

1回目のじゃんけんてAだけが勝つのは、Aが出した手に対して、B, C, Dがそれに負ける手を出す場合であり、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

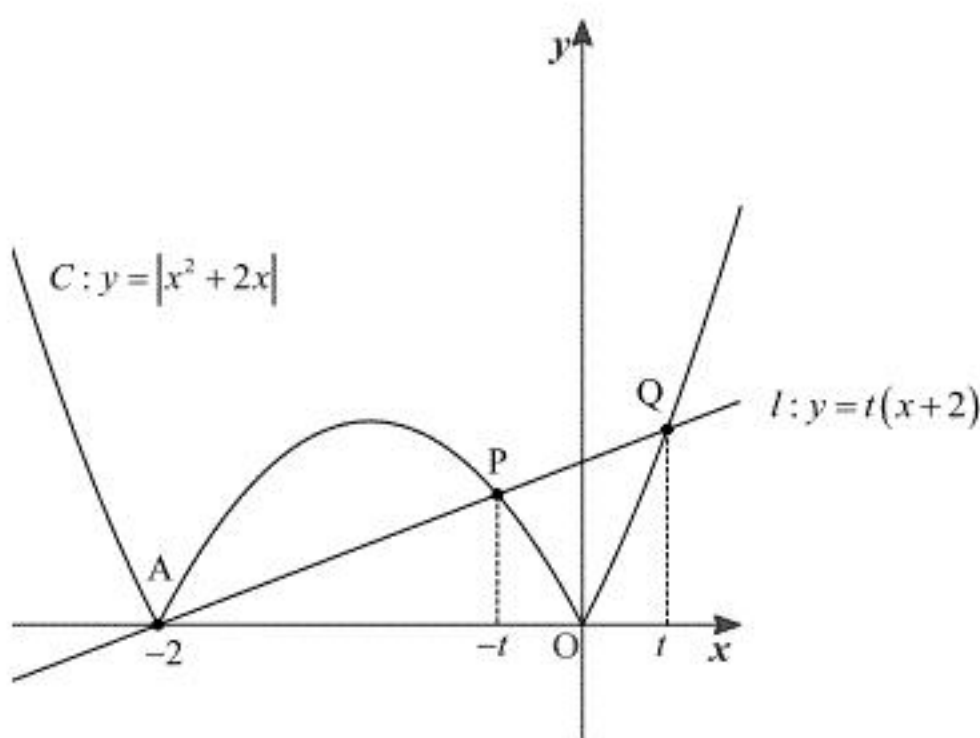
である。

### Ⅲ

〔解答〕

(i) P の  $x$  座標:  $-t$ , Q の  $x$  座標:  $t$

(ii)  
(i)より,  $C$  と  $l$  を図示すると以下のようになる。



上図より, 線分 AP と  $C$  で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-2}^{-t} \{-x^2 - 2x - t(x+2)\} dx \\ &= -\int_{-2}^{-t} (x+t)(x+2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-t)^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1(t) = \frac{1}{6}(2-t)^3$$

(iii)  
(ii)の図より, 線分 PQ と  $C$  で囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_{-t}^0 \{t(x+2) - (-x^2 - 2x)\} dx + \int_0^t \{t(x+2) - (x^2 + 2x)\} dx \\ &= \int_{-t}^0 \{x^2 + (t+2)x + 2t\} dx + \int_0^t \{-x^2 + (t-2)x + 2t\} dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx \right]_{-t}^0 + \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{t-2}{2}x^2 + 2tx \right]_0^t \\ &= -\left\{ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{t^2(t+2)}{2} - 2t^2 \right\} + \left\{ -\frac{1}{3}t^3 + \frac{t^2(t-2)}{2} + 2t^2 \right\} \\ &= 2t^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_2(t) = 2t^2$$

(iv)  
線分 AQ と  $C$  で囲まれた 2 つの部分は, 線分 AP と  $C$  で囲まれた部分と, 線分 PQ と  $C$  で囲まれた部分を合わせたものである。したがって,

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= \frac{1}{6}(2-t)^3 + 2t^2 \\ &= -\frac{1}{6}(t^3 - 18t^2 + 12t - 8) \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\frac{1}{6}(3t^2 - 36t + 12) \\ &= -\frac{1}{2}(t^2 - 12t + 4) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(t) = -\frac{1}{6}(t^3 - 18t^2 + 12t - 8), \quad S'(t) = -\frac{1}{2}(t^2 - 12t + 4)$$

(v)  
$$S'(t) = -\frac{1}{2}(t^2 - 12t + 4)$$
$$= -\frac{1}{2}\{t - (6 - 4\sqrt{2})\}\{t - (6 + 4\sqrt{2})\}$$

である。 $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$  より  $5 < 4\sqrt{2} < 6$  であるため,  $0 < 6 - 4\sqrt{2} < 2 < 6 + 4\sqrt{2}$  である。したがって,  $0 < t < 2$  の範囲で増減表は以下のようになる。

|         |           |            |                 |            |             |
|---------|-----------|------------|-----------------|------------|-------------|
| $t$     | (0)       | ...        | $6 - 4\sqrt{2}$ | ...        | (2)         |
| $S'(t)$ | $\diagup$ | -          | 0               | +          | $\diagdown$ |
| $S(t)$  | $\diagup$ | $\searrow$ |                 | $\nearrow$ | $\diagdown$ |

ゆえに,  $S(t)$  は  $t = 6 - 4\sqrt{2}$  のとき最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad t = 6 - 4\sqrt{2}$$

〔解説〕

(i)  
 $l: y = t(x+2)$  であるから,  $C$  と  $l$  の式を連立すると

$$\begin{aligned} |x^2 + 2x| &= t(x+2) \\ \Leftrightarrow |x(x+2)| &= t(x+2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) \geq 0 \\ x(x+2) = t(x+2) \end{cases} &\text{または} \begin{cases} x(x+2) < 0 \\ -x(x+2) = t(x+2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, 0 \leq x \\ x = -2, t \end{cases} &\text{または} \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x = -2, -t \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = -2, t &\text{または} x = -t \quad (\because 0 < t < 2) \\ \Leftrightarrow x = -2, \pm t \end{aligned}$$

となる。よって P の  $x$  座標は  $-t$  であり, Q の  $x$  座標は  $t$  である。