

I.

【解答】

(i)	ア	イ	ウ	
	2	-4	5	
(ii)	エ			
	$\frac{1}{3}$			
(iii)	オ	カ	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{\pi}{3}$			
(iv)	キ			
	$\frac{2}{5}$			
(v)	ク			
	$\frac{16}{27}$			

【解説】

(i)

$f(x)$ は $x=1$ で最小値 3 をとるから、正の実数 p を用いて

$$f(x)=p(x-1)^2+3$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ \Leftrightarrow p+3 &= 5 \\ \Leftrightarrow p &= 2 \end{aligned}$$

であるから、確かに $p>0$ であり、 $f(x)=2(x-1)^2+3=2x^2-4x+5$ となる。よって

$a=2, b=-4, c=5$ である。

(ii)

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n - \left\{ (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1) \right\} \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n - \left\{ (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + 3(n^2 - 2n + 1) + 2(n-1) \right\} \\ &= 3n^2 + 3n \end{aligned}$$

である。また、 $n=1$ のときは $a_1=S_1=6$ である。したがって、 $n \geq 1$ のときはまとめて

$a_n=3n^2+3n$ と表せる。よって、 N を自然数とすると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{3n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cos 2t + 2\cos t \\ &= 2(2\cos^2 t - 1) + 2\cos t \\ &= 4\cos^2 t + 2\cos t - 2 \\ &= 2(2\cos t - 1)(\cos t + 1) \end{aligned}$$

である。 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $0 \leq \cos t \leq 1$ である。したがって、 $f'(t)=0$ となるのは $\cos t = \frac{1}{2}$

すなわち $t = \frac{\pi}{3}$ のときである。 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	2

したがって、 $f(t)$ は $t = \frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(iv)

$$\begin{aligned} \text{OA} &= |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \text{OB} &= \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。さらに、 z の偏角を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと、 θ は $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす角

であり、ド・モアブルの定理より $\frac{1}{z}$ の偏角は $-\theta$ であるから、 $\angle \text{AOB} = 2\theta$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \triangle \text{OAB} &= \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \sin 2\theta \\ &= \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。

(v)

1 の目と 2 の目をまとめて A と呼び、さいころを 3 回投げられて、かつ、さいころを 3 回投げた後に、持ち点が 1 点以上残る事象を X と呼ぶ。3 回投げるまでに一度も A が出ないとき、持ち点は少なくとも 3 点減るため、最終的な持ち点は 0 点以下になる。したがって、 X が起きるためには、3 回の間に少なくとも一度は A が出る必要があるため、初めて A が出る場合分けする。

[1] 1 回目に A が出るとき

このとき、2 回目と 3 回目はどの目が出てもよい。したがって、 X が起きる確率は $\frac{1}{3}$ である。

[2] 2 回目に初めて A が出るとき

このとき、1 回目と 3 回目はどの目が出てもよい。1 回目に A 以外の目が出る確率は $\frac{2}{3}$ である。

あるから、 X が起きる確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。

[3] 3 回目に初めて A が出るとき

1 回目と 2 回目に、ともに 3 の目または 4 の目が出ればよい。したがって、 X が起きる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ である。

以上、[1], [2], [3] より、 X が起きる確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{16}{27}$$

である。

II.

【解答】

(i)

$e^x > 0, e^{-x} > 0$ より, 相加平均・相乗平均の関係から

$$g(x) \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$$

である。等号成立条件は $e^x = e^{-x}$, すなわち $x = 0$ である。よって, $g(x)$ の最小値は 2 である。

(答) 2

(ii) $f(x) = t^2 - 6$

(iii)

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ であり, $g(x)$ は連続な関数だから, $g(x)$ は 2 以上の全ての実数を取りうる。す

なわち, t も 2 以上の全ての実数を取りうる。このとき, (ii) より $f(x) = t^2 - 6, g(x) = t$ と表されるから,

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6 = t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \quad (\because t \geq 2)$$

となる。ここで, $g(x) = t$ であるから, 共有点の y 座標は 3 である。

(答) 3

(iv)

$t = e^x + e^{-x}$ の置換をすると

$$f(x) \leq g(x)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 6 \leq t$$

$$\Leftrightarrow (t+2)(t-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq t \leq 3$$

である。 t のとりうる値の範囲は $t \geq 2$ であるから

$$t \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 \leq 3e^x \quad (\because e^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(e^x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq e^x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

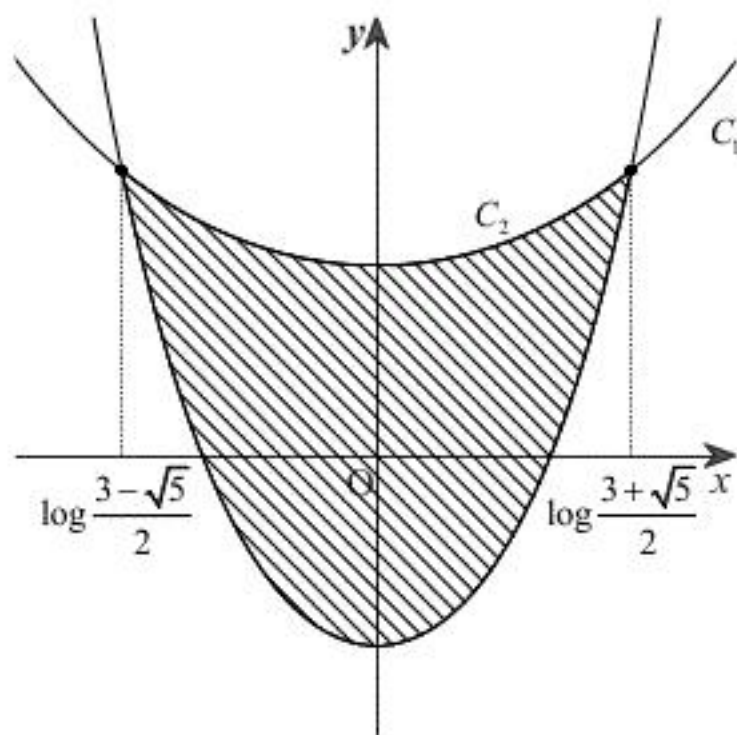
$$\Leftrightarrow \log \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

となる。

$$(答) \log \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(v)

求める面積 S は下図の斜線部分の面積である。



$a = \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}, b = \log \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと, $a+b = \log \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = 0$ より, $b = -a$ である。ま

た, $f(x) = f(-x), g(x) = g(-x)$ であるため, $f(x), g(x)$ はともに偶関数である。ゆえに,

$$\begin{aligned} S &= \int_b^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= 2 \int_0^a (e^x + e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 4) dx \\ &= 2 \left[e^x - e^{-x} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + 4x \right]_0^a \\ &= 2 \left(e^a - e^{-a} - \frac{e^{2a}}{2} + \frac{e^{-2a}}{2} + 4a \right) - 2 \left(1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2(e^a - e^{-a}) - (e^a - e^{-a})(e^a + e^{-a}) + 8a \\ &= (e^a - e^{-a}) \{2 - (e^a + e^{-a})\} + 8a \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ 2 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right\} + 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5}$$

【解説】

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} + e^{-2x} - 4 \\ &= (e^x + e^{-x})^2 - 6 \\ &= t^2 - 6 \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ.

【解答】

$$(i) \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$(ii) \quad B'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right), C'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

(iii)

P の y 座標は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{21}}{6}\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\sin\alpha + \frac{2\sqrt{7}}{7}\cos\alpha\right) \\ &= \frac{\sqrt{21}}{6}\sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

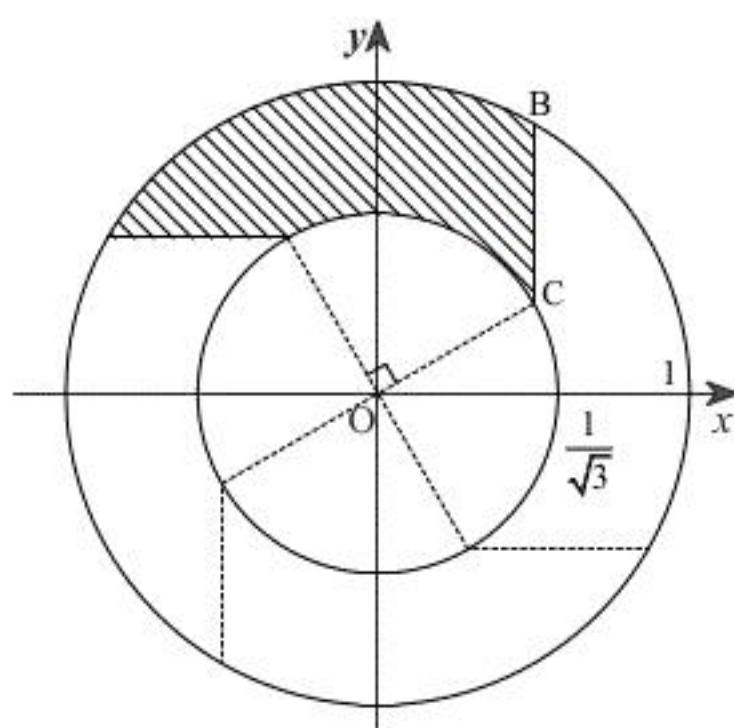
である。ここで、 β は $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ を満たす角である。 $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ より $\beta \leq \alpha + \beta \leq \frac{2\pi}{3} + \beta$ であるから、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, すなわち $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ のとき $f(\alpha)$ は最大値 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$$(iv) \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

(v)

B', C' はともに B, C を原点中心に回転させた点であるため、それぞれ中心が原点である半径 $1, \frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上を動く。また、 $\alpha = 0$ のとき、 $B'C'$ は y 軸に平行であり、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $B'C'$ は x 軸に平行である。したがって、 $B'C'$ が通過する領域は下図の斜線部ようになる。



前図より、斜線部の面積は、半径が $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1$ の 2 つの円に囲まれた円環領域の面積を $\frac{1}{4}$ 倍した値である。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \left\{ \pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{6}$$

【解説】

(i)

$OA = 1$ であり、三角形 OAB は正三角形であるため、 $OB = 1$ である。また $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であり、

B の y 座標は正であるから、 B の座標は $B\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, すなわち $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。また、

重心 C の座標は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(0 + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \left(0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

より、 $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ である。

(ii)

複素数平面上で B, C と対応する複素数をそれぞれ β, γ とすると、(i) より $\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ である。ここで、 B', C' と対応する複素数をそれぞれ β', γ' とすると、 $OA'B'$ は

OAB を反時計回りに角度 α 回転させたときの三角形であるから、

$$\begin{aligned} \beta' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \right)i \\ \gamma' &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \right)i \end{aligned}$$

となる。よって、 B', C' の座標はそれぞれ $B'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$,

$C'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$ となる。

(iv)

$B'C'$ が x 軸と平行になるのは、 B' と C' の y 座標が等しいときである。よって

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\sin\alpha_0 &= \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\sin\alpha_0 \\ \Leftrightarrow \cos\alpha_0 &= 0 \\ \therefore \alpha_0 &= \frac{\pi}{2} \left(\because 0 \leq \alpha_0 \leq \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

である。

Ⅳ.

(i)

与式の左辺は、

$$\begin{aligned} a^N \sum_{n=0}^N \left(\frac{b}{a} \right)^n &= a^N \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a} \right)^{N+1}}{1 - \frac{b}{a}} \\ &= \frac{a^{N+1} - b^{N+1}}{a - b} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $C = a^{N+1} - b^{N+1}$ である。

(答) $C = a^{N+1} - b^{N+1}$

(ii)

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^{40} - 3^{10}}{9997} \\ &= \frac{10000^{10} - 3^{10}}{10000 - 3} \end{aligned}$$

と変形できる。 A は(i)の式において $(a, b, N) = (10000, 3, 9)$ とした場合に等しい。ゆえに、

$$\begin{aligned} A &= 10000^9 \cdot \sum_{n=0}^9 \left(\frac{3}{10000} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^9 10000^{9-n} \cdot 3^n \end{aligned}$$

となる。 $n = 0, 1, \dots, 9$ のとき、 $10000^{9-n} \cdot 3^n$ は整数であるため、 A は整数である。 B についても同様に、 $(a, b, N) = (10000, 3, 8)$ とした場合に等しく、

$$\begin{aligned} B &= 10000^8 \cdot \sum_{n=0}^8 \left(\frac{3}{10000} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^8 10000^{8-n} \cdot 3^n \end{aligned}$$

と変形できる。 $n = 0, 1, \dots, 8$ のとき、 $10000^{8-n} \cdot 3^n$ は整数であるため、 B は整数である。

(証明終)

(iii)

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^9 10000^{9-n} \cdot 3^n \\ &= 3^9 + \sum_{n=0}^8 10000^{9-n} \cdot 3^n \end{aligned}$$

である。 $n = 0, 1, \dots, 8$ のとき、 $10000^{9-n} \cdot 3^n$ は10で割り切れるため、 A を10で割った余りは 3^9 を10で割った余りと等しい。

$$\begin{aligned} 3^9 &= 3 \cdot (10 - 1)^4 \\ &= 3 \cdot (10^4 - {}_4C_3 \cdot 10^3 + {}_4C_2 \cdot 10^2 - {}_4C_1 \cdot 10 + 1) \\ &= 10 \cdot 3 \cdot (10^3 - {}_4C_3 \cdot 10^2 + {}_4C_2 \cdot 10 - {}_4C_1) + 3 \end{aligned}$$

と変形できるから、 3^9 を10で割った余りは3である。したがって、 A の1の位の数字は3である。

(答) 3

(iv)

$$\begin{aligned} A - 3B &= \sum_{n=0}^9 10000^{9-n} \cdot 3^n - 3 \sum_{n=0}^8 10000^{8-n} \cdot 3^n \\ &= (10000^9 + 3 \cdot 10000^8 + 3^2 \cdot 10000^7 + \dots + 3^9) - 3(10000^8 + 3 \cdot 10000^7 + \dots + 3^8) \\ &= 10000^9 \\ &= 2^{36} \cdot 5^{36} \end{aligned}$$

となる。

(答) $2^{36} \cdot 5^{36}$

(v)

A, B の公約数を g とおく。(iv)より

$$A - 3B = 2^{36} \cdot 5^{36}$$

が成立し、左辺は g の倍数であるから、右辺も g の倍数である。よって g は $2^{36} \cdot 5^{36}$ の約数である。ここで、(iii)より A の1の位の数字が3であるから、 g は2の倍数でも5の倍数でもない。したがって、 $g = 1$ に限られる。以上より、 A, B の最大公約数は1である。

(答) 1