

I.

〔解答〕

(i)	ア	イ	ウ	
	2	−4	5	
(ii)	エ			
	$\frac{1}{3}$			
(iii)	オ	カ	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{\pi}{3}$			
(iv)	キ			
	$\frac{2}{5}$			
(v)	ク			
	$\frac{16}{27}$			

〔解説〕

(i)

$f(x)$ は $x=1$ で最小値 3 をとるから、正の実数 p を用いて

$$f(x)=p(x-1)^2+3$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \\ \Leftrightarrow p+3 &= 5 \\ \Leftrightarrow p &= 2 \end{aligned}$$

であるから、確かに $p>0$ であり、 $f(x)=2(x-1)^2+3=2x^2-4x+5$ となる。よって

$a=2, b=-4, c=5$ である。

(ii)

$n\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n - \{ (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1) \} \\ &= 3n^2 + 3n \end{aligned}$$

である。また、 $n=1$ のときは $a_1=S_1=6$ である。したがって、 $n\geq 1$ のときはまとめて

$a_n=3n^2+3n$ と表せる。よって、 N を自然数とすると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{3n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(iii)

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cos 2t + 2\cos t \\ &= 2(2\cos^2 t - 1) + 2\cos t \\ &= 4\cos^2 t + 2\cos t - 2 \\ &= 2(2\cos t - 1)(\cos t + 1) \end{aligned}$$

である。 $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $0\leq \cos t\leq 1$ である。したがって、 $f'(t)=0$ となるのは $\cos t=\frac{1}{2}$

すなわち $t=\frac{\pi}{3}$ のときである。 $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	2

したがって、 $f(t)$ は $t=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(iv)

$$\begin{aligned} \text{OA} &= |z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ \text{OB} &= \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。さらに、 z の偏角を θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと、 θ は $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす角

であり、ド・モアブルの定理より $\frac{1}{z}$ の偏角は $-\theta$ であるから、 $\angle\text{AOB}=2\theta$ となる。したがっ

て、

$$\begin{aligned} \triangle\text{OAB} &= \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \sin 2\theta \\ &= \text{OA} \cdot \text{OB} \cdot \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。

(v)

1 の目と 2 の目をまとめて A と呼び、さいころを 3 回投げられて、かつ、さいころを 3 回投げた後に、持ち点が 1 点以上残る事象を X と呼ぶ。3 回投げるまでに一度も A が出ないとき、持ち点は少なくとも 3 点減るため、最終的な持ち点は 0 点以下になる。したがって、 X が起きるためには、3 回の間に一度は A が出る必要があるため、初めて A が出るときで場合分けする。

[1] 1 回目に A が出るとき

このとき、2 回目と 3 回目はどの目が出てもよい。したがって、 X が起きる確率は $\frac{1}{3}$ である。

[2] 2 回目に初めて A が出るとき

このとき、1 回目と 3 回目はどの目が出てもよい。1 回目に A 以外の目が出る確率は $\frac{2}{3}$ で

あるから、 X が起きる確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。

[3] 3 回目に初めて A が出るとき

1 回目と 2 回目に、ともに 3 の目または 4 の目が出ればよい。したがって、 X が起きる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ である。

以上、[1], [2], [3] より、 X が起きる確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{16}{27}$$

である。

II.

〔解答〕

(i)

$e^x > 0, e^{-x} > 0$ より、相加平均・相乗平均の関係から

$$g(x) \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$$

である。等号成立条件は $e^x = e^{-x}$ 、すなわち $x=0$ である。よって、 $g(x)$ の最小値は 2 である。

(答) 2

(ii) $f(x) = t^2 - 6$

(iii)

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ であり、 $g(x)$ は連続な関数だから、 $g(x)$ は 2 以上の全ての実数を取りうる。す

なわち、 t も 2 以上の全ての実数を取りうる。このとき、(ii) より $f(x) = t^2 - 6, g(x) = t$ と表されるから、

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow t^2 - 6 &= t \\ \Leftrightarrow t^2 - t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-3)(t+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 3 \quad (\because t \geq 2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) = t$ であるから、共有点の y 座標は 3 である。

(答) 3

(iv)

$t = e^x + e^{-x}$ の置換をすると

$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \\ \Leftrightarrow t^2 - 6 &\leq t \\ \Leftrightarrow (t+2)(t-3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq t \leq 3 \end{aligned}$$

である。 t のとりうる値の範囲は $t \geq 2$ であるから

$$\begin{aligned} -2 &\leq t \leq 3 \\ \Leftrightarrow t &\leq 3 \\ \Leftrightarrow e^x + e^{-x} &\leq 3 \\ \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 &\leq 3e^x \quad (\because e^x > 0) \\ \Leftrightarrow \left(e^x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(e^x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} &\leq e^x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow \log \frac{3-\sqrt{5}}{2} &\leq x \leq \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \log \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

(v)

$a = \log \frac{3+\sqrt{5}}{2}, b = \log \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ とおくと、 $a+b = \log \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) = 0$ より、 $b = -a$ である。ま

た、 $f(x) = f(-x), g(x) = g(-x)$ であるため、 $f(x), g(x)$ はともに偶関数である。ゆえに、

$$\begin{aligned} S &= \int_b^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= 2 \int_0^a (e^x + e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 4) dx \\ &= 2 \left[e^x - e^{-x} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} + 4x \right]_0^a \\ &= 2 \left(e^a - e^{-a} - \frac{e^{2a}}{2} + \frac{e^{-2a}}{2} + 4a \right) - 2 \left(1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 2(e^a - e^{-a}) - (e^a - e^{-a})(e^a + e^{-a}) + 8a \\ &= (e^a - e^{-a}) \{2 - (e^a + e^{-a})\} + 8a \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \left\{ 2 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right\} + 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &= 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) 8 \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{5}$$

〔解説〕

(ii)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} + e^{-2x} - 4 \\ &= (e^x + e^{-x})^2 - 6 \\ &= t^2 - 6 \end{aligned}$$

となる。

Ⅲ.

〔解答〕

$$(i) \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$(ii) \quad B'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right), C'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

(iii)

P の y 座標は

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{21}}{6}\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\sin\alpha + \frac{2\sqrt{7}}{7}\cos\alpha\right) \\ &= \frac{\sqrt{21}}{6}\sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

である。ここで、 β は $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ を満たす角である。 $0 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ より

$\beta \leq \alpha + \beta \leq \frac{2\pi}{3} + \beta$ であるから、 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, すなわち $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ のとき $f(\alpha)$ は最大値 $\frac{\sqrt{21}}{6}$ をとる。

(答) $\frac{\sqrt{21}}{6}$

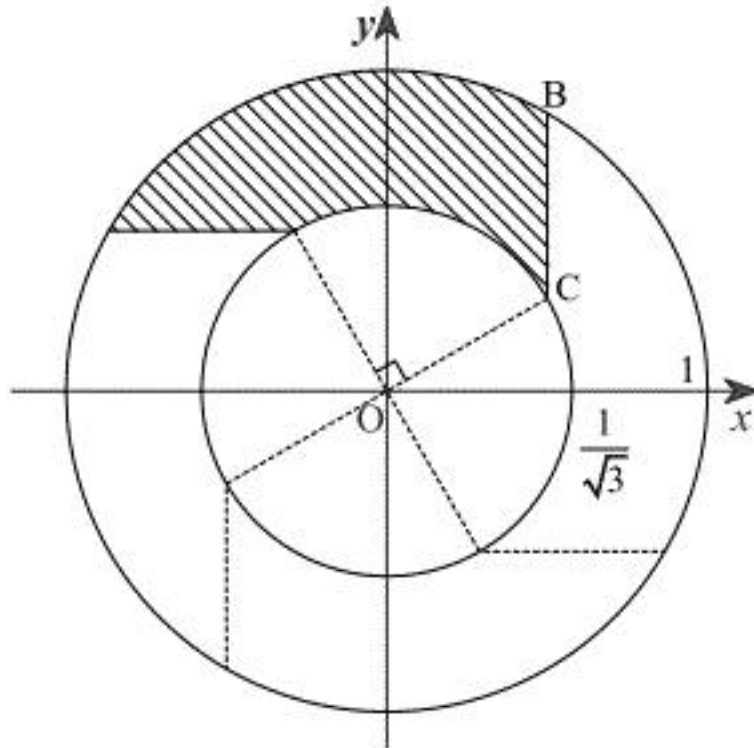
$$(iv) \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

(v)

B', C' はともに B, C を原点中心に回転させた点であるため、それぞれ中心が原点である半径

$1, \frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上を動く。また、 $\alpha = 0$ のとき、 BC は y 軸に平行であり、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $B'C'$

は x 軸に平行である。したがって、 $B'C'$ が通過する領域は下図の斜線部のようにになる。



前図より、斜線部の面積は、半径が $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1$ の 2 つの円に囲まれた円環領域の面積を $\frac{1}{4}$ 倍した値である。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \left\{ \pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{6}$

〔解説〕

(i)

$OA = 1$ であり、三角形 OAB は正三角形であるため、 $OB = 1$ である。また $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であり、

B の y 座標は正であるから、 B の座標は $B\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$, すなわち $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。また、

重心 C の座標は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(0 + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \left(0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

より、 $C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ である。

(ii)

複素数平面上で B, C と対応する複素数をそれぞれ β, γ とすると、(i) より $\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ である。ここで、 B', C' と対応する複素数をそれぞれ β', γ' とすると、 $OA'B'$ は

OAB を反時計回りに角度 α 回転させたときの三角形であるから、

$$\beta' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \right)i$$

$$\gamma' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \right) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \right)i$$

となる。よって、 B', C' の座標はそれぞれ $B'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$,

$C'\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\alpha, \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)$ となる。

(iv)

$B'C'$ が x 軸と平行になるのは、 B' と C' の y 座標が等しいときである。よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\sin\alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\sin\alpha_0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha_0 = 0$$

$$\therefore \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \left(\because 0 \leq \alpha_0 \leq \frac{2\pi}{3} \right)$$

である。