

2023年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて黒鉛筆または黒のシャープペンシルで記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I. 下記の空欄ア～キにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 関数 $y = 4 \cos^2 \theta - 4 \sin \theta - 5$ の最小値は ア である。

(ii) 2つの実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $z = 2x + y$ のとりうる値の範囲は イ である。

(iii) 三角形ABCにおいて $AB = AC = 4$, $BC = 6$ とする。AB上の点Pが $CP = 5$ を満たすとき、 $AP =$ ウ である。

(iv) 大小2個のさいころを同時に投げる。大きいさいころの出た目を a , 小さいさいころの出た目を b とするとき、 $\frac{a}{b}$ が整数になる確率は エ である。

(v) t を実数とする。座標空間において、3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 0)$ の定める平面OAB上に点 $C(1+t, t, 1-t)$ があるとき、 $t =$ オ である。

(vi) 2次式 $f(x)$ が $f(f(x)) = f(x)^2 + 1$ を満たすとき、 $f(x) =$ カ である。

(vii) 座標平面の3つの部分集合

$$A = \{(x, -2x + 2) \mid x \text{ は実数}, x < 0\}$$

$$B = \{(x, 2x + 2) \mid x \text{ は実数}, x \geq 0\}$$

$$C = \{(x, -x + 3) \mid x \text{ は実数}\}$$

に対し、 $(A \cup B) \cap C$ に属する点の座標をすべて求めると キ である。

Ⅱ. 1 年目の初めに新規に 100 万円を預金し, 2 年目以降の毎年初めに 12 万円を追加で預金する。ただし, 毎年の終わりに, その時点での預金額の 8 % が利子として預金に加算される。自然数 n に対して, n 年目の終わりに利子を加算された後の預金額を S_n 万円とする。このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。解答欄には, (i), (ii) については答えのみを, (iii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) S_1, S_2 をそれぞれ求めよ。

(ii) S_{n+1} を S_n を用いて表せ。

(iii) S_n を n を用いて表せ。

(iv) $\log_{10} 1.08$ を求めよ。

(v) $S_n > 513$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

Ⅲ. p を正の実数とする。O を原点とする座標平面上の放物線 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点 $P\left(p, \frac{1}{4}p^2\right)$ における接線を l , P を通り x 軸に垂直な直線を m とする。また, m 上の点 $Q(p, -1)$ を通り, l に垂直な直線を n とし, l と n の交点を R とする。さらに, l に関して Q と対称な点を S とする。このとき, 次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には, (i) については答えのみを, (ii) ~ (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) l の方程式を p を用いて表せ。

(ii) n の方程式および R の座標をそれぞれ p を用いて表せ。

(iii) S の座標を求めよ。

(iv) l を対称軸として, l に関して m と対称な直線 m' の方程式を p を用いて表せ。また, m' と C の交点のうち P と異なる点を T とするとき, T の x 座標を p を用いて表せ。

(v) (iv) の T に対して, 線分 ST , 線分 OS および C で囲まれた部分の面積を p を用いて表せ。

【以下余白】

