2023年度

Aa 数 学 問 題

注 意

1．試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2．解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3．この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4．解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5．解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6．解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7．計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8．この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ．下記の空欄ア～オにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（ｉ） 方程式 $2^{x+2}-2^{2x+1}+16=0$ を解くと $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

（ii） 関数 $f(t)=a\cos^3 t+\cos^2 t$ が $t=\dfrac{\pi}{4}$ で極値をとるとき，$a=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

（iii） 座標平面上の2点O（0，0）とP（2023，1071）について，線分OP上にある点（x，y）で x，y が共に整数であるものの個数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。ただし，線分OPは両端点を含むものとする。

（iv） $-1\leqq\alpha\leqq1$ とする。x に関する方程式

$$x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}+\alpha=0$$

が整数解を持つとき，α の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

（ｖ） 表の出る確率が $\dfrac{2}{3}$，裏の出る確率が $\dfrac{1}{3}$ のコインを投げて，表が出たら $+1$ 点を加え，裏が出たら -1 点を加える，というルールのゲームを行う。0点から始めて5回コインを投げ終わったとき，得点が3点以上となる確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

Ⅱ． $0 < k < 1$ および $\ell > 1$ とする。座標空間内の四面体OABCにおいて，線分ACの中点をD，線分BCの中点をEとし，線分DEを $1:2$ に内分する点をPとする。また，線分OPを $k:1-k$ に内分する点をQとし，Rを $\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を満たす点とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいたとき，次の問(ⅰ)～(ⅳ)に答えよ。解答欄には，(ⅰ)については答えのみを，(ⅱ)～(ⅳ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

必要ならば，空間におけるどのようなベクトル $\vec{v}$ も3つの実数 x，y，z を用いて $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ の形にただ1通りに書けることは，証明せずに用いて良い。

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k，ℓ を用いて表せ。

(ⅲ) Rが平面OAB上にあるとき，ℓ を k を用いて表せ。

(ⅳ) 線分OAの中点をF，線分OBの中点をGとする。Rが線分FG上にあるときの k の値を求めよ。

Ⅲ. 座標平面上の曲線 C を

$$C:\ y=\frac{3}{x}-8 \quad (x>0)$$

で定める。また，p を正の数とし，点 $\left(p,\ \frac{3}{p}-8\right)$ における C の接線を l とする。さらに，a を実数とし，直線 $y=ax$ を m とする。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，(ⅰ)については答えのみを，(ⅱ)～(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) l の方程式を求めよ。

(ⅱ) l が原点を通るとき，p の値を求めよ。

(ⅲ) C と m が異なる2点P，Qを共有するとき，a の値の範囲を求めよ。

(ⅳ) (ⅲ)のとき，Qの x 座標 x_0 はPの x 座標 x_1 よりも大きいとする。$x_0-x_1=1$ であるときの a の値を求めよ。

(ⅴ) (ⅳ)のとき，C と直線 m で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

Ⅳ. 正の数列 $x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_n, \cdots$ は以下を満たすとする。

$$x_1 = 8,\ x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots).$$

このとき，次の問(ｉ)～(iv)に答えよ。解答欄には，(ｉ)については答えのみを，(ii)～(iv)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ｉ)　$x_2,\ x_3,\ x_4$ をそれぞれ求めよ。

(ii)　すべての $n \geqq 1$ について $(x_{n+1} - \alpha)(x_{n+1} + \alpha) = x_n - \alpha$ となる定数 α で，正であるものを求めよ。

(iii)　α を(ii)で求めたものとする。すべての $n \geqq 1$ について $x_n > \alpha$ であることを，n に関する数学的帰納法で示せ。

(iv)　極限値 $\lim_{n \to \infty} x_n$ を求めよ。

【以下余白】