

2023年度

A_b 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**8 ページ**までとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～オにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 方程式 $2^{x+2} - 2^{2x+1} + 16 = 0$ を解くと $x =$ である。

(ii) 関数 $f(t) = a \cos^3 t + \cos^2 t$ が $t = \frac{\pi}{4}$ で極値をとるとき、 $a =$ である。

(iii) 座標平面上の2点 $O(0, 0)$ と $P(2023, 1071)$ について、線分 OP 上にある点 (x, y) で x, y が共に整数であるものの個数は である。ただし、線分 OP は両端点を含むものとする。

(iv) $-1 \leq \alpha \leq 1$ とする。 x に関する方程式

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} + \alpha = 0$$

が整数解を持つとき、 α の値は である。

(v) 表の出る確率が $\frac{2}{3}$ ，裏の出る確率が $\frac{1}{3}$ のコインを投げて、表が出たら $+1$ 点を加え、裏が出たら -1 点を加える、というルールของเกมを行う。 0 点から始めて 5 回コインを投げ終わったとき、得点が 3 点以上となる確率は である。

Ⅱ. $0 < k < 1$ および $\ell > 1$ とする。座標空間内の四面体OABCにおいて、線分ACの中点をD、線分BCの中点をEとし、線分DEを $1:2$ に内分する点をPとする。また、線分OPを $k:1-k$ に内分する点をQとし、Rを $\overrightarrow{CR} = \ell \overrightarrow{CQ}$ を満たす点とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおいたとき、次の問(i)~(iv)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)~(iv)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

必要ならば、空間におけるどのようなベクトル $\vec{v}$ も3つの実数 x, y, z を用いて $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ の形にただ1通りに書けることは、証明せずに用いて良い。

(i) $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(ii) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, k , ℓ を用いて表せ。

(iii) Rが平面OAB上にあるとき、 ℓ を k を用いて表せ。

(iv) 線分OAの中点をF、線分OBの中点をGとする。Rが線分FG上にあるときの k の値を求めよ。

Ⅲ. 座標平面上の曲線 C を

$$C : y = \frac{3}{x} - 8 \quad (x > 0)$$

で定める。また、 p を正の数とし、点 $\left(p, \frac{3}{p} - 8\right)$ における C の接線を l とする。
さらに、 a を実数とし、直線 $y = ax$ を m とする。このとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) l の方程式を求めよ。

(ii) l が原点を通るとき、 p の値を求めよ。

(iii) C と m が異なる2点 P 、 Q を共有するとき、 a の値の範囲を求めよ。

(iv) (iii)のとき、 Q の x 座標 x_0 は P の x 座標 x_1 よりも大きいとする。 $x_0 - x_1 = 1$ であるときの a の値を求めよ。

(v) (iv)のとき、 C と直線 m で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

【以下余白】

