2023年度

Ca 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I．下記の空欄ア～クにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

（i）　2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $x=1$ で最小値3をとり，$f(0)=5$ となるとき $a=$ ア ，$b=$ イ ，$c=$ ウ である。

（ii）　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n=n^3+3n^2+2n$ であるとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=$ エ である。

（iii）　$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，関数 $f(t)=\sin 2t+2\sin t$ は $t=$ オ で最大値 カ をとる。

（iv）　$z=2+i$ とおく。複素数平面上の3点O(0)，A(z)，B(z^{-1}) を頂点とする三角形OABの面積は キ である。ただし，i は虚数単位とする。

（v）　さいころを1個投げて，1の目または2の目が出れば持ち点が3増え，3の目または4の目が出れば持ち点が1減る。5の目または6の目が出れば，持ち点が2減る。持ち点が0以下になったときにはそれ以降さいころを投げることはできない。最初に持ち点が3点与えられたとき，さいころを3回投げられて，かつ，さいころを3回投げた後に，持ち点が1点以上残る確率は ク である。

II. 関数 $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} - 4$, $g(x) = e^{x} + e^{-x}$ に対して，２つの曲線 C_1, C_2 を

$$C_1 : y = f(x),\quad C_2 : y = g(x)$$

とする。このとき，次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には，(ii)については答えのみを，(i)，(iii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i)　$g(x)$ の最小値を求めよ。

(ii)　$t = e^{x} + e^{-x}$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ。

(iii)　C_1 と C_2 の共有点の y 座標を求めよ。

(iv)　$f(x) \leqq g(x)$ となる x の値の範囲を求めよ。

(v)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

III. 座標平面上の３点O（０，０），A（１，０），Bに対し，三角形OABは正三角形である。ただし，Bの y 座標は正であるとする。さらに点CはOABの重心とする。Oを中心としてOABを反時計回りに角度 α 回転させたときの三角形をOA′B′ とする。さらに点C′はOA′B′ の重心とする。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とする。このとき，次の問（ｉ）〜（ｖ）に答えよ。解答欄には，（ｉ），（ii），（iv）については答えのみを，（iii），（ｖ）については答えだけでなく途中経過も書くこと。

（ｉ） BおよびCの座標をそれぞれ求めよ。

（ii） B′ およびC′ の座標をそれぞれ $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ を用いて表せ。

（iii） 線分B′C′ の中点をPとし，Pの y 座標を $f(\alpha)$ とする。$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲における $f(\alpha)$ の最大値を求めよ。

（iv） 線分B′C′ が x 軸と平行になるときの α の値を α_0 とする。α_0 を求めよ。

（ｖ） α が０から（iv）で求めた α_0 まで動くとき，B′C′ が通過する領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

Ⅳ. $A=\dfrac{10^{40}-3^{10}}{9997}$, $B=\dfrac{10^{36}-3^{9}}{9997}$ とする。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) a, b, N を自然数とし，$a \neq b$ とする。$a^N \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{C}{a-b}$ とおくとき，C を a, b, N を用いて表せ。ただし，総和記号 $\sum$ を用いてはならない。

(ⅱ) A と B が整数であることを示せ。

(ⅲ) A の1の位の数字を求めよ。

(ⅳ) $A-3B$ を素因数分解せよ。

(ⅴ) A と B の最大公約数を求めよ。

【以下余白】