2023年度

Cb 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
   (万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は**8ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ. 下記の空欄ア～クにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $x=1$ で最小値3をとり，$f(0)=5$ となるとき $a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$，$c=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n=n^3+3n^2+2n$ であるとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\boxed{\text{エ}}$ である。

(iii) $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，関数 $f(t)=\sin 2t+2\sin t$ は $t=\boxed{\text{オ}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(iv) $z=2+i$ とおく。複素数平面上の3点O(0)，A(z)，B(z^{-1}) を頂点とする三角形OABの面積は $\boxed{\text{キ}}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

(v) さいころを1個投げて，1の目または2の目が出れば持ち点が3増え，3の目または4の目が出れば持ち点が1減る。5の目または6の目が出れば，持ち点が2減る。持ち点が0以下になったときにはそれ以降さいころを投げることはできない。最初に持ち点が3点与えられたとき，さいころを3回投げられて，かつ，さいころを3回投げた後に，持ち点が1点以上残る確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

Ⅱ. 関数 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-4$, $g(x)=e^{x}+e^{-x}$ に対して，２つの曲線 C_1, C_2 を

$$C_1: y=f(x),\quad C_2: y=g(x)$$

とする。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，(ⅱ)については答えのみを，(ⅰ)，(ⅲ)～(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ)　$g(x)$ の最小値を求めよ。

(ⅱ)　$t=e^{x}+e^{-x}$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ。

(ⅲ)　C_1 と C_2 の共有点の y 座標を求めよ。

(ⅳ)　$f(x)\leqq g(x)$ となる x の値の範囲を求めよ。

(ⅴ)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

Ⅲ. 座標平面上の３点O（０，０），A（１，０），Bに対し，三角形OABは正三角形である。ただし，Bの y 座標は正であるとする。さらに点CはOABの重心とする。Oを中心としてOABを反時計回りに角度 α 回転させたときの三角形をOA′B′ とする。さらに点C′ はOA′B′ の重心とする。ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ とする。このとき，次の問（ⅰ）～（ⅴ）に答えよ。解答欄には，（ⅰ），（ⅱ），（ⅳ）については答えのみを，（ⅲ），（ⅴ）については答えだけでなく途中経過も書くこと。

（ⅰ） BおよびCの座標をそれぞれ求めよ。

（ⅱ） B′ およびC′ の座標をそれぞれ $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ を用いて表せ。

（ⅲ） 線分B′C′ の中点をPとし，Pの y 座標を $f(\alpha)$ とする。$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲における $f(\alpha)$ の最大値を求めよ。

（ⅳ） 線分B′C′ が x 軸と平行になるときの α の値を α_0 とする。α_0 を求めよ。

（ⅴ） α が０から（ⅳ）で求めた α_0 まで動くとき，B′C′ が通過する領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

【以下余白】