

I

【解答】

(i)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	
	8	−35	
(ii)	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$
	8	−7	3
(iii)	$\boxed{\text{カ}}$		
	$\frac{5}{8}$		
(iv)	$\boxed{\text{キ}}$		
	$2\sqrt{3}$		
(v)	$\boxed{\text{ク}}$		
	2^{n-2}		
(vi)	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$	
	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$	

【解説】

(i)
 $\log_2 x = t$ とおくと、 $1 \leq x \leq 8$ より
 $\log_2 1 \leq t \leq \log_2 8$
 $\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3$. . . ①
となる。 y を t の式で表すと、
 $y = t^2 - 8t - 20$
 $= (t - 4)^2 - 36$
である。これは、 ty 平面上の直線 $t = 4$ を軸とする下に凸の放物線を表すから、①の範囲において、 y は $t = 3$ すなわち $x = 8$ のときに最小値 $(3 - 4)^2 - 36 = -35$ をとる。

(ii)
与式が x についての恒等式となるとき、与式の両辺に $(x + 1)^3$ をかけて得られる等式
 $3x^2 - x + 4 = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$
 $\Leftrightarrow 3x^2 - x + 4 = cx^2 + (b + 2c)x + a + b + c$
も x についての恒等式である。したがって、両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} c = 3 \\ b + 2c = -1 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -7 \\ c = 3 \end{cases}$$

を得る。

(iii)
余事象の、さいころを3回投げて出る目をすべてかけた数が4の倍数とならない場合を考える。以下ではさらに、さいころを3回投げて出る目をすべてかけた数が[1] 奇数になるとき、[2] 2の倍数であるが、4の倍数でないとき、の2つの場合に分ける。
[1] 奇数になるとき
このとき、3回とも1, 3, 5のいずれかの目が出るから、その確率は、
 $\left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{8}$
となる。
[2] 2の倍数であるが、4の倍数でないとき
このとき、3回のうち1回だけ2, 6のいずれかの目が出て、2回だけ1, 3, 5のいずれかの目が出るから、その確率は、
 ${}_3C_1 \cdot \left(\frac{2}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}$
となる。
以上、[1], [2]より、求める確率は、 $1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}$ である。

(iv)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2 \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{2}{\tan 2\theta} \end{aligned}$$

と変形できるから、 $\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき、

$$\frac{2}{\tan 2\theta} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$$

となる。

(v)
 $n \geq 2$ のとき
 $a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. . . ②
より、 $n \geq 3$ のとき
 $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. . . ③

となる。②−③より、 $n \geq 3$ のとき
 $a_{n+1} - a_n = a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n$
となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ は $n \geq 3$ において公比2の等比数列である。ここで、②より
 $a_3 = a_1 + a_2 = 2$ であるから、 $n \geq 3$ のとき
 $a_n = a_3 \cdot 2^{n-3}$
 $= 2^{n-2}$
となる。

(vi)
 $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $f(x) \geq 0$ より、 $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$ である。したがって、実数 $k (\geq 0)$ を用いて $\int_0^1 f(t) dt = k$ とおける。このとき、
 $kf(x) = x^2 + 5$. . . ④

である。 $k = 0$ だと④は成り立たないため $k \neq 0$ であり、 $f(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{5}{k}$ となる。したがって、
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{k} + \frac{5}{k} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3k} + \frac{5}{k} t \right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3k} \end{aligned}$$

より、
 $k = \frac{16}{3k} \Leftrightarrow k = \frac{4}{\sqrt{3}} (\because k \geq 0)$
を得る。よって④より、 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{4}$ であるから、 $a = \frac{\sqrt{3}}{4}, b = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ となる。

Ⅱ

〔解答〕

$$(i) \quad l: y = -2px + p^2, \quad m: y = 2qx + q^2 \quad (ii) \quad R\left(\frac{p-q}{2}, pq\right)$$

(iii)

点 $Q(-q, -q^2)$ と直線 $l: 2px + y - p^2 = 0$ の距離 d は,

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2p \cdot (-q) - q^2 - p^2|}{\sqrt{(2p)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|p^2 + 2pq + q^2|}{\sqrt{4p^2 + 1}} \\ &= \frac{(p+q)^2}{\sqrt{4p^2 + 1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad d = \frac{(p+q)^2}{\sqrt{4p^2 + 1}}$$

(iv)

$p > 0, q > 0$ より $p+q > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} PR &= \sqrt{\left(\frac{p-q}{2} - p\right)^2 + \{pq - (-p^2)\}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \{p(p+q)\}^2} \\ &= (p+q) \sqrt{p^2 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{p+q}{2} \sqrt{4p^2 + 1} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot PR \cdot d \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{p+q}{2} \sqrt{4p^2 + 1} \cdot \frac{(p+q)^2}{\sqrt{4p^2 + 1}} \\ &= \frac{(p+q)^3}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S = \frac{(p+q)^3}{4}$$

$$(v) \quad q = \frac{1}{4p}$$

(vi)

l と m が直交するとき, (v) より $q = \frac{1}{4p}$ であるから, $S = \frac{1}{4} \left(p + \frac{1}{4p}\right)^3$ である。 $p > 0, \frac{1}{4p} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{1}{4} \left(p + \frac{1}{4p}\right)^3 \geq \frac{1}{4} \left(2 \sqrt{p \cdot \frac{1}{4p}}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

となる。等号成立条件は,

$$p = \frac{1}{4p} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \quad (\because p > 0)$$

である。したがって S の最小値は $\frac{1}{4}$ である。

$$(答) \quad p = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{4}$$

〔解説〕

(i)

$y' = -2x$ であるから, 点 $P(p, -p^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-p^2) &= -2p(x - p) \\ \Leftrightarrow y &= -2px + p^2 \end{aligned}$$

である。また, 点 $Q(-q, q^2)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-q^2) &= -2(-q)\{x - (-q)\} \\ \Leftrightarrow y &= 2qx + q^2 \end{aligned}$$

である。

(ii)

$p > 0, q > 0$ より $p+q \neq 0$ であるから, l と m の交点 R の x 座標は

$$\begin{aligned} -2px + p^2 &= 2qx + q^2 \\ \Leftrightarrow 2(p+q)x &= (p-q)(p+q) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p-q}{2} \quad (\because p+q \neq 0) \end{aligned}$$

となる。これを l の方程式に代入すると $y = -2p \cdot \frac{p-q}{2} + p^2 = pq$ となるから, R の座標は

$$\left(\frac{p-q}{2}, pq\right) \text{ である。}$$

(v)

l と m が直交するとき $p \neq 0$ より

$$-2p \cdot 2q = -1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{4p}$$

となる。

