

I

【解答】

(i)	$\boxed{\text{ア}}$		
	48		
(ii)	$\boxed{\text{イ}}$		
	15		
(iii)	$\boxed{\text{ウ}}$		
	$\frac{\sqrt{10}}{2}$		
(iv)	$\boxed{\text{エ}}$		
	-18		
(v)	$\boxed{\text{オ}}$		
	$-\frac{40}{27}$		
(vi)	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$
	-6	5	0

【解説】

(i) 10進数に直してから計算すると、

$$\begin{aligned} 1011_{(2)} \times 11_{(2)} + 1111_{(2)} &= (2^3 + 2^1 + 2^0) \times (2^1 + 2^0) + (2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0) \\ &= 11 \times 3 + 15 \\ &= 48 \end{aligned}$$

となる。

(ii) 赤玉の数を n (n は整数, $2 \leq n \leq 20$) とする。このとき、袋の中から同時に 2 つの玉を取り出すとき、取り出した玉が 2 個とも赤である確率は、 n を用いて、

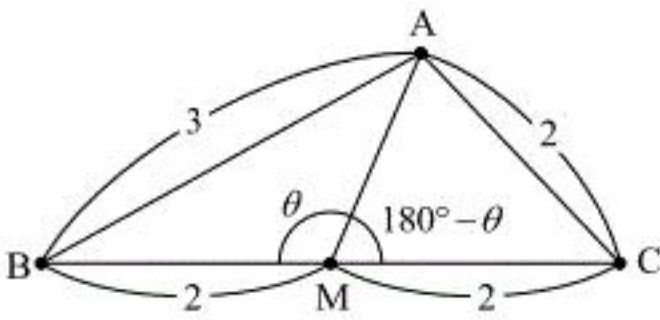
$$\begin{aligned} \frac{{}_n\text{C}_2}{{}_{20}\text{C}_2} &= \frac{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}}{\frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1}} \\ &= \frac{n(n-1)}{380} \end{aligned}$$

である。これが $\frac{21}{38}$ に等しいから、

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{380} &= \frac{21}{38} \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 210 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-15)(n+14) &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= 15 \quad (\because 2 \leq n \leq 20) \end{aligned}$$

となる。

(iii)



$\angle AMB = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおき、 $\triangle AMB$ と $\triangle AMC$ に関して余弦定理を用いる。

$\angle AMC = 180^\circ - \theta$ に注意して、

$$\begin{aligned} AB^2 &= AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos \theta \\ AC^2 &= AM^2 + CM^2 + 2AM \cdot CM \cos \theta \quad (\because \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta) \end{aligned}$$

となる。 $BM = CM$ に注意して 2 式を足し合わせると、

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

となる。ここに各値を代入し、

$$\begin{aligned} 3^2 + 2^2 &= 2(AM^2 + 2^2) \\ \Leftrightarrow AM^2 &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow AM &= \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\because AM > 0) \end{aligned}$$

となる。

(iv)

一般に、

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \end{aligned}$$

である。 $a = x, b = \frac{1}{x}$ として、

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (-3)^3 - 3(-3) \\ &= -18 \end{aligned}$$

となる。

(v)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 4x - 4 \\ &= (x+2)(3x-2) \end{aligned}$$

である。したがって、増減表は以下のようになる。

x	-3	...	-2	...	$\frac{2}{3}$	...	3
$f'(x)$	↘ ↗	+	0	-	0	+	↘ ↗
$f(x)$	3	↗	8	↘	$-\frac{40}{27}$	↗	33

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{2}{3}$ で最小値 $-\frac{40}{27}$ をとる。

(vi)

直線上の任意の点を P とおくと、 $\overrightarrow{OP}$ は実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{a} \\ &= (-10, -3, 8) + k(1, 2, -2) \\ &= (-10+k, -3+2k, 8-2k) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表される。直線と xy 平面との交点では、 z 成分が 0 となるため、

$$\begin{aligned} 8-2k &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= 4 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入し、直線と xy 平面との交点の座標は $(-6, 5, 0)$ とわかる。

Ⅱ

〔解答〕

$$(i) \quad x=1, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{4}$$

$$(ii) \quad b_{n+1}=\sqrt{\frac{b_n}{2}}$$

(iii)

$b_{n+1}=\sqrt{\frac{b_n}{2}}$ の両辺は正より、2 を底とする対数をとると、

$$\log_2 b_{n+1}=\frac{1}{2}(\log_2 b_n-\log_2 2)$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1}+1=\frac{1}{2}(c_n+1)$$

となる。また、初項について、

$$c_1=\log_2 b_1=\log_2 \frac{a_2}{a_1}=1$$

である。したがって、数列 $\{c_n+1\}$ は初項 2、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって、

$$c_n+1=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1$$

(iv)

(iii)の結果を用いると、

$$S_n=\sum_{k=1}^n c_k$$

$$=\sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}-1 \right\}$$

$$=2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n$$

$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-n$$

(v)

2 以上の n に対して、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \\ &= b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdots b_1 \quad (\because a_1=1) \\ &= 2^{c_{n-1}} \cdot 2^{c_{n-2}} \cdots 2^{c_1} \\ &= 2^{c_{n-1}+c_{n-2}+\cdots+c_1} \\ &= 2^{S_{n-1}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$d_n=S_{n-1}$$

$$=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)-2}-(n-1)$$

$$=5-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-n$$

となる。 $a_1=1$ より、 $d_1=0$ であるため、上式は $n=1$ でも成立する。したがって、すべての n

に対して、 $d_n=5-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-n$ である。

$$(\text{答}) \quad d_n=5-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-n$$

〔解説〕

(i)

条件より、

$$a_3=\sqrt{\frac{2^3}{2 \cdot 1}}=2$$

$$a_4=\sqrt{\frac{2^3}{2 \cdot 2}}=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$$

$$a_5=\sqrt{\frac{\sqrt{2}^3}{2 \cdot 2}}=\sqrt{2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}} = 2^{\frac{1}{4}}$$

となるから、

$$x=1, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{4}$$

である。

(ii)

条件より a_n は正である。したがって、

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{a_{n+1}}\sqrt{\frac{a_{n+1}^3}{2a_n}}$$

$$=\sqrt{\frac{a_{n+1}}{2a_n}} \quad (\because a_{n+1}>0)$$

$$=\sqrt{\frac{b_n}{2}}$$

となる。

Ⅲ

〔解答〕

(i)

C と l の式を連立すると、

$$x^2 + 2px + q = -x + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2p+1)x + q - \frac{3}{4} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①の判別式を D とすると、 C が l に接する条件は、

$$D=0$$

$$\Leftrightarrow (2p+1)^2 - 4\left(q - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = p^2 + p + 1$$

である。

(答) $q = p^2 + p + 1$

(ii) $(-p, p+1)$

(iii)

(i)より、 C が l に接するとき $C: y = (x+p)^2 + p+1$ となる。したがって、 C が x 軸にも接するとき、

$$p+1=0$$

$$\Leftrightarrow p = -1$$

となる。このときの C の方程式は、

$$y = (x-1)^2$$

である。また、 C と l との接点の x 座標は①の重解であり、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2p+1}{2} \\ &= -\frac{2 \cdot (-1) + 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $C: y = (x-1)^2$ 、接点の x 座標: $x = \frac{1}{2}$

(iv)

(i)より、 C が l に接するとき $C: y = x^2 + 2px + p^2 + p + 1$ となる。このとき C がさらに m に接する条件を求める。 C と m の方程式を連立すると、

$$x^2 + 2px + p^2 + p + 1 = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(p-1)x + p^2 + p + 1 = 0$$

となる。この2次方程式の判別式を D' とすると、 C が m に接する条件は、

$$\frac{D'}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (p-1)^2 - (p^2 + p + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0$$

である。したがって、 C の方程式は、

$$y = x^2 + 1$$

となる。このとき、 C と l との接点の x 座標は①の重解であり、

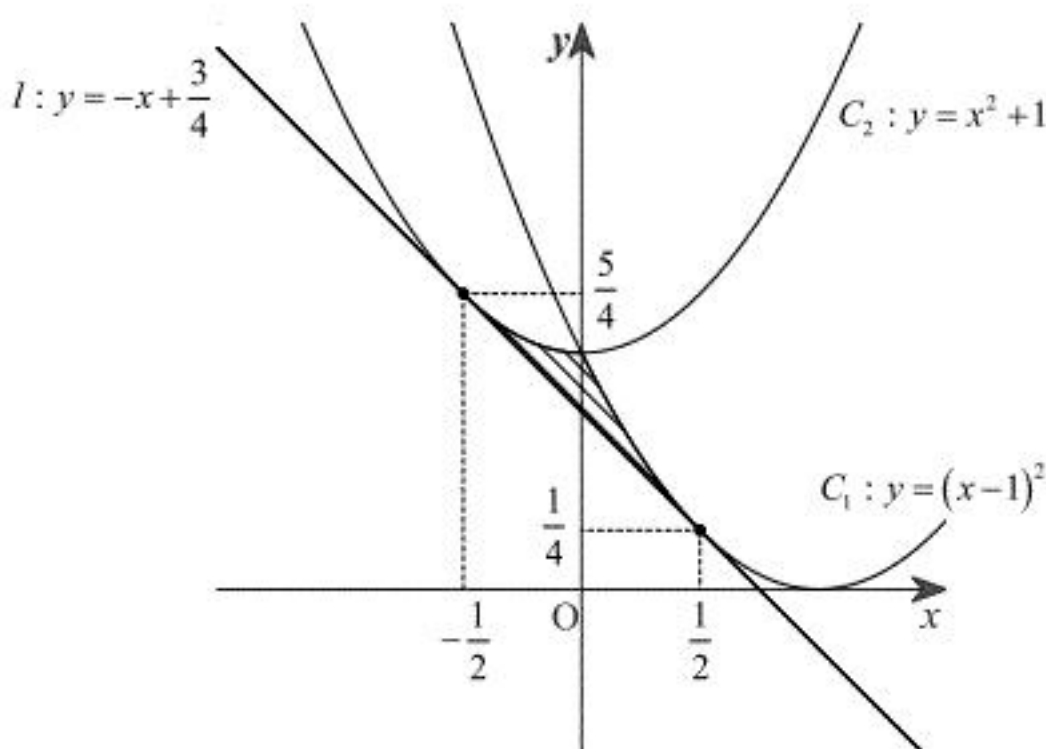
$$\begin{aligned} x &= -\frac{2p+1}{2} \\ &= -\frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $C: y = x^2 + 1$ 、接点の x 座標: $x = -\frac{1}{2}$

(v)

C_1, C_2, l を図示すると、下図のようになる。



したがって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left\{ (x^2 + 1) - \left(-x + \frac{3}{4} \right) \right\} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ (x-1)^2 - \left(-x + \frac{3}{4} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{1}{12}$

〔解説〕

(ii)

(i)より C が l に接する条件は $q = p^2 + p + 1$ である。この条件の下で、 C の方程式は、

$$y = (x+p)^2 - p^2 + q$$

$$= (x+p)^2 - p^2 + (p^2 + p + 1)$$

$$= (x+p)^2 + p + 1$$

となる。したがって、 C が l に接するとき、 C の頂点の座標は $(-p, p+1)$ となる。