

I.

〔解答〕

(i)	ア	イ
	3^n-1	728
(ii)	ウ	
	$\sqrt{2}$	
(iii)	エ	
	$\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{1}{e^4}\right)$	
(iv)	オ	
	$\frac{15}{46}$	
(v)	カ	
	23	

〔解説〕

(i)

与式は

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 3a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 3(a_n + 1)\end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列だから、

$$\begin{aligned}a_n + 1 &= 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \\ \therefore a_n &= 3^n - 1\end{aligned}$$

である。次に、 $a_1 = 2$ は 4 で割り切れず、 n が 3 以上の奇数、すなわち $n = 2m + 1$ (m は自然数) のとき、

$$a_{2m+1} = 3 \cdot 9^m - 1 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$$

である。一方、 n が偶数、すなわち $n = 2m$ のとき、

$$a_{2m} = 9^m - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$$

となる。したがって、 a_n の値が 4 で割り切れるのは n が偶数のときであるから、そのような項のうち 3 番目の項は第 6 項である。よって、求める項の値は

$$a_6 = 3^6 - 1 = 728$$

である。

(ii)

真数は正であるから、

$$\begin{aligned}\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x > 1\end{aligned}$$

である。また、 $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2 \log_2 x = \log_2 x^2$ より、与式を変形すると

$$\begin{aligned}\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) + \log_2 x^2 &= 1 \\ \therefore \log_2 (x-1)(x+1)x^2 &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+1)x^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-2) &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{2} \quad (\because x > 1)\end{aligned}$$

となる。

(iii)

$$|e^{2x}-1| = \begin{cases} e^{2x}-1 & (x \geq 0) \\ -e^{2x}+1 & (x < 0) \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 |e^{2x}-1| dx &= \int_{-2}^0 (-e^{2x}+1) dx + \int_0^1 (e^{2x}-1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}e^{2x} - x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(e^2 + \frac{1}{e^4} \right)\end{aligned}$$

となる。

(iv)

袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき、赤玉が 0 個である確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$$

となるから、赤玉が少なくとも 1 個取り出される確率は

$$1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

となる。また、3 個中 2 個が赤玉、1 個が白玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_3} = \frac{15}{56}$$

であるから、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{15}{56}}{\frac{23}{28}} = \frac{15}{46}$$

となる。

(v)

得点の中央値は試験における 10 位と 11 位の得点の平均である。よって、10 位の得点が 30 点、11 位の得点が 20 点であり、

$$a = 5, b = 7$$

となる。したがって、得点の平均値は

$$\frac{0 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 1}{20} = 23$$

である。

Ⅱ.

〔解答〕

(i)

$$\text{ア}:(1-t), \text{イ}:t$$

(ii)

$$\overline{AE}=\frac{2}{3}\overline{AC}, \overline{AB}=\frac{3}{2}\overline{AD} \text{ であるから, (i) より,}$$

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= (1-t)\overline{AB} + t\left(\frac{2}{3}\overline{AC}\right) \\ &= (1-t)\left(\frac{3}{2}\overline{AD}\right) + t\left(\frac{2}{3}\overline{AC}\right) \\ &= \frac{3}{2}(1-t)\overline{AD} + \frac{2}{3}t\overline{AC}\end{aligned}$$

となる。Fは線分CD上の点であるから

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(1-t) + \frac{2}{3}t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\overline{AF} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$$

と表せるから

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{3}{5}, x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$$

(iii)

$$\overline{AF} = \frac{2}{5}\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \overline{OA} + \overline{AF} \\ &= \vec{a} + \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{5}(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, r = \frac{2}{5}$$

である。

$$\text{(答)} \quad p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, r = \frac{2}{5}$$

(iv)

$\overline{OF} \perp (\text{平面 } ABC)$ から

$$\overline{OF} \perp \overline{AB}, \overline{OF} \perp \overline{AC}$$

である。よって, $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1$, $\angle BOC$ 直角より $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{OF} \cdot \overline{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}\right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OF} \cdot \overline{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①, ②を解いて

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$$

と求められる。

$$\text{(答)} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$$

(v)

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 &= |\overline{OB} - \overline{OA}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + 1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。また,

$$\begin{aligned}|\overline{AC}|^2 &= |\overline{OC} - \overline{OA}|^2 \\ &= |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + 1 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}, AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

〔解説〕

(i)

点Fが線分BEを $t:1-t$ に内分しているとき

$$\overline{AF} = (1-t)\overline{AB} + t\overline{AE}$$

となる。

Ⅲ.

【解答】

(i)

$$f'(x)=1+\log x$$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$-\frac{1}{e}$	

(ii)

$$-\frac{1}{e} \quad (x=\frac{1}{e} \text{ のとき})$$

(iii)

$$g'(x)=-(1+\log x)\sin(x\log x)$$

(iv)

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1		e
$g'(x)$		-	0	+	0	-	-
$g(x)$			$\cos\left(-\frac{1}{e}\right)$		1		$\cos e$

(v)

(iv)の増減表と、

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \cos 0 = 1$$

より、 $0 < x \leq e$ における $g(x)$ の最大値は $g(1)=1$ である。

(答) 1

(vi)

$$g\left(\frac{1}{e}\right)=\cos\left(-\frac{1}{e}\right)=\cos\frac{1}{e}$$

$$g\left(\sqrt{e}\right)=\cos\frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$g(e)=\cos e$$

である。まず、 $g(e)=\cos e$ について、 $\frac{\pi}{2} < e < \pi$ より

$$g(e) < 0$$

である。次に、

$$1.6^2=2.56 < 2.7$$

$$1.7^2=2.89 > 2.8$$

より

$$1.6 < \sqrt{e} < 1.7$$

$$\Leftrightarrow 0.8 < \frac{\sqrt{e}}{2} < 0.85$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{e} < 1 < \frac{\sqrt{e}}{2} < \frac{\pi}{2}$$

を得る。よって、

$$0 < \cos\frac{\sqrt{e}}{2} < \cos\frac{1}{e} < 1$$

である。したがって、4つの実数 $0, g\left(\frac{1}{e}\right), g\left(\sqrt{e}\right), g(e)$ を小さい順に左から並べると

$$g(e), 0, g\left(\sqrt{e}\right), g\left(\frac{1}{e}\right)$$

となる。

(答) $g(e), 0, g\left(\sqrt{e}\right), g\left(\frac{1}{e}\right)$

【解説】

(i)

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\log x$$

より、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$-\frac{1}{e}$	

(ii)

(i)の増減表より、 $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ である。

(iii)

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\log x)' \{-\sin(x\log x)\} \\ &= -(1+\log x)\sin(x\log x) \end{aligned}$$

である。

(iv)

$1+\log x$ は $0 < x < \frac{1}{e}$ で負、 $x=\frac{1}{e}$ で0、 $\frac{1}{e} < x$ で正となる。一方、 $\sin(x\log x)$ について、

$0 < x \leq e$ のとき

$$-\pi < -\frac{1}{e} \leq x\log x \leq e < \pi$$

であるから、(i)の増減表を合わせて考えると、 $\sin(x\log x)$ は $0 < x < 1$ で負、 $x=1$ で0、 $1 < x \leq e$ で正となる。したがって、 $g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1		e
$g'(x)$		-	0	+	0	-	-
$g(x)$			$\cos\left(-\frac{1}{e}\right)$		1		$\cos e$

IV.

〔解答〕

(i)

実部:0, 虚部:1

(ii)

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (w \neq 1)$$

(iii)

$|z|=1$ かつ $z \neq -1$ であるから, $z = \frac{1+w}{1-w}$ を代入すると

$$\left| \frac{1+w}{1-w} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |w+1| = |w-1|$$

となる。よって, 点 w の描く図形は 2 点 $-1, 1$ を結ぶ線分の垂直二等分線, つまり虚軸である。これは $w \neq 1$ を満たす。

(答) 虚軸

(iv)

$|z|=2$ より, $z = \frac{1+w}{1-w}$ を代入すると

$$\left| \frac{1+w}{1-w} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow |w+1| = 2|w-1|$$

となる。両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned} (w+1)(\overline{w+1}) &= 4(w-1)(\overline{w-1}) \\ \Leftrightarrow w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 &= 4(w\overline{w} - w - \overline{w} + 1) \\ \Leftrightarrow w\overline{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\overline{w} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(w - \frac{5}{3}\right)\left(\overline{w} - \frac{5}{3}\right) &= \frac{16}{9} \\ \Leftrightarrow \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 &= \frac{16}{9} \\ \therefore \left|w - \frac{5}{3}\right| &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。よって, 点 w は点 $\frac{5}{3}$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円を描く。これは $w \neq 1$ を満たす。したがって,

$$a = \frac{5}{3}, r = \frac{4}{3}$$

である。

(答) $a = \frac{5}{3}, r = \frac{4}{3}$

(v)

$z = \frac{1+w}{1-w}$ のとき, $\overline{z} = \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}$ であるから, z の実部が常に 1 より

$$\begin{aligned} \frac{z+\overline{z}}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1-w\overline{w}}{(1-w)(1-\overline{w})} &= 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} w\overline{w} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}\overline{w} = 0 \\ w \neq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left(w - \frac{1}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ w \neq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left|w - \frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \\ w \neq 1 \end{cases} \\ \therefore \left|w - \frac{1}{2}\right| &= \frac{1}{2} \quad (\text{ただし } w \neq 1) \end{aligned}$$

となる。よって, 点 w の描く図形は点 $\frac{1}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。ただし点 1 を除

く。したがって, 点 w の虚部は $w = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ のときに最大値 $\frac{1}{2}$ をとり, $w = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ のときに最小

値 $-\frac{1}{2}$ をとる。また, $z = \frac{1+w}{1-w}$ より, $w = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ となるのは

$$z = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i$$

のときであり, $w = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ となるのは

$$z = \frac{1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)} = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-2i$$

のときである。以上より, w の虚部は $z = 1+2i$ のときに最大値 $\frac{1}{2}$ をとり, $z = 1-2i$ のときに

最小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

(答) $z = 1+2i$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$, $z = 1-2i$ のとき最小値 $-\frac{1}{2}$

〔解説〕

(i)

$z = i$ のとき,

$$w = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(1+i)i}{1+i} = i$$

となる。

(ii)

与式を変形すると

$$\begin{aligned} w(z+1) &= z-1 \\ \Leftrightarrow (w-1)z &= -w-1 \end{aligned}$$

となる。ここで, $1 = \frac{z-1}{z+1}$ を満たす z は存在しないから, $w \neq 1$ である。よって,

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (w \neq 1)$$

である。