

I.

【解答】

(i)	ア	イ
	$3^n - 1$	728
(ii)	ウ	
	$\sqrt{2}$	
(iii)	エ	
	$\frac{1}{2}(e^2 + e^{-4})$	
(iv)	オ	
	$\frac{15}{46}$	
(v)	カ	
	23	

【解説】

(i)

与えられた漸化式より

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 3a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 3(a_n + 1)\end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列である。よって

$$\begin{aligned}a_n + 1 &= 3 \cdot 3^{n-1} \\ \therefore a_n &= 3^n - 1\end{aligned}$$

を得る。 a_n を順番に計算していくと

$$\begin{aligned}a_1 &= 2 \equiv 2 \pmod{4} \\ a_2 &= 8 \equiv 0 \pmod{4} \\ a_3 &= 26 \equiv 2 \pmod{4} \\ a_4 &= 80 \equiv 0 \pmod{4} \\ a_5 &= 242 \equiv 2 \pmod{4} \\ a_6 &= 728 \equiv 0 \pmod{4}\end{aligned}$$

となるから、 $\{a_n\}$ の中で 4 で割り切れる項のうちの 3 番目の項の値は 728 である。

(ii)

真数条件より

$$x - 1 > 0, x + 1 > 0, x > 0$$

$$\therefore x > 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} x &= \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} \\ &= 2 \log_2 x \\ &= \log_2 x^2\end{aligned}$$

より、与式を変形すると

$$\begin{aligned}\log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) + \log_{\sqrt{2}} x &= 1 \\ \Leftrightarrow \log_2 (x - 1) + \log_2 (x + 1) + \log_2 x^2 &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 (x - 1)(x + 1)x^2 &= \log_2 2 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)x^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\textcircled{1}$ より $x = \sqrt{2}$ である。

(iii)

$$|e^{2x} - 1| = \begin{cases} e^{2x} - 1 & (x \geq 0) \\ 1 - e^{2x} & (x < 0) \end{cases}$$

より、求める定積分の値は

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 |e^{2x} - 1| dx &= \int_{-2}^0 (1 - e^{2x}) dx + \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 \\ &= \{0 - (-2)\} - \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) + \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (1 - 0) \\ &= \frac{1}{2}(e^2 + e^{-4})\end{aligned}$$

となる。

(iv)

袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき、赤玉が 0 個である確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$$

となるから、赤玉が少なくとも 1 個取り出される確率は

$$1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

となる。また、3 個中 2 個が赤玉、1 個が白玉である確率は

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_5C_1}{{}_8C_3} = \frac{15}{56}$$

である。よって、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{15}{56}}{\frac{23}{28}} = \frac{15}{46}$$

となる。

(v)

20 人の得点の中央値が 25 であるとき、10, 11 番目に得点が小さい生徒の得点はそれぞれ 20, 30 点となる。0 点が 3 人、10 点が 2 人であるから、このとき 20 点の生徒の人数は 5 人とわかる。また、40 点が 2 人、50 点が 1 人であるから、30 点の生徒の人数は

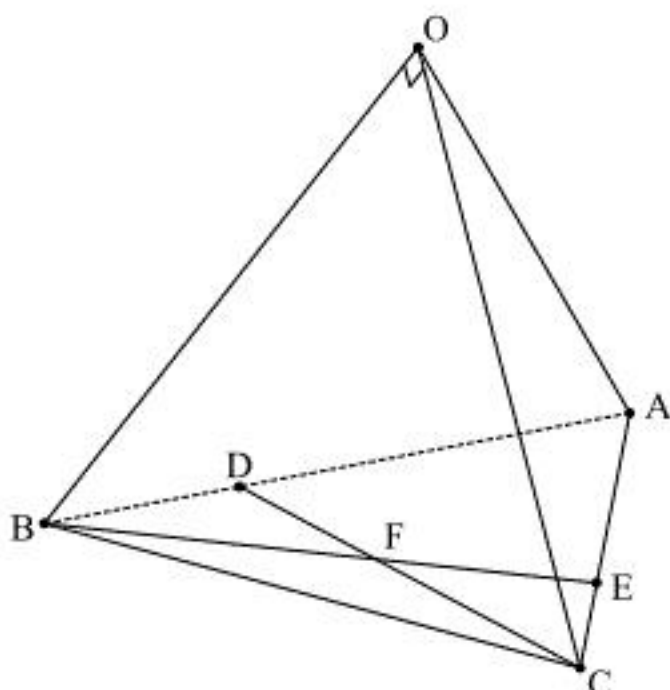
$$20 - 3 - 2 - 5 - 2 - 1 = 7 \text{ (人)}$$

となる。よって、得点の平均値は

$$\frac{1}{20}(0 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 40 \cdot 2 + 50 \cdot 1) = 23$$

となる。

II.



(i)

点Fが線分BEを $t:1-t$ に内分しているとき

$$\overrightarrow{AF} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

(答) ア: $(1-t)$, イ: t

(ii)

$$\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}, \overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AD} \text{ であるから, (i) より,}$$

$$\overrightarrow{AF} = (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AE}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}(1-t)\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{AC}$$

となる。点Fが線分CD上にあることから

$$\frac{3}{2}(1-t) + \frac{2}{3}t = 1$$

$$\therefore t = \frac{3}{5}$$

となる。①にこれと $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \left(1 - \frac{3}{5}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となるから、 $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ である。

(答) $t = \frac{3}{5}, x = \frac{2}{5}, y = \frac{2}{5}$

(iii)

(ii)より, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \frac{2}{5}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$$\therefore \overrightarrow{OF} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$$

となる。よって、 $p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, r = \frac{2}{5}$ である。

(答) $p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{5}, r = \frac{2}{5}$

(iv)

$\overline{OF}$ が平面ABCに垂直であるとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{OF} \cdot (b-a) = 0 & \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \\ \text{OF} \cdot (c-a) = 0 & \cdot \cdot \cdot \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}$ より

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}|\vec{a}|^2 + \frac{2}{5}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{5}\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b} + \frac{2}{5} \vec{c} \right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}|a|^2 + \frac{2}{5}|c|^2 - \frac{2}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{5}\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

となる。ここで、 $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 1$ 、 $\angle BOC$ 直角より $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であるから

$$\begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{5} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \end{cases}$$
$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$

(v)

(iv)より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + 1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となり、 $AB = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ である。同様に、 $AC = \frac{2\sqrt{3}}{2}$ となる。

(答) $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}, AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ⅲ.

(i)

$f(x)=x\log x$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(x) &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &= \log x + 1\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

(答) $f'(x)=\log x+1$, 前表

(ii)

(i)より、 $f(x)$ の最小値は $x=\frac{1}{e}$ のとき、 $-\frac{1}{e}$ である。

(答) $-\frac{1}{e}$ ($x=\frac{1}{e}$ のとき)

(iii)

$g(x)=\cos(x\log x)$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(x) &= -(x\log x)' \sin(x\log x) \\ &= -(\log x + 1) \sin(x\log x)\end{aligned}$$

となる。

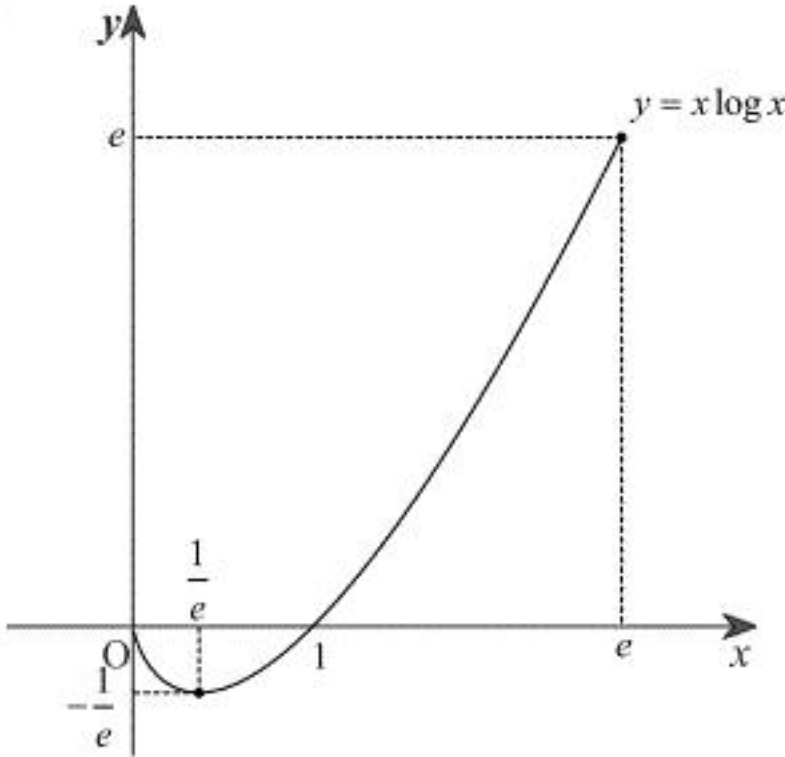
(答) $g'(x) = -(\log x + 1) \sin(x\log x)$

(iv)

(iii)より、 $g'(x)=0$ とすると

$$\begin{aligned}-(\log x + 1) \sin(x\log x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x + 1 = 0, \sin(x\log x) &= 0 \\ \therefore x = \frac{1}{e}, \sin(x\log x) &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで、(i)と $\lim_{x \rightarrow +0} x\log x = 0$ より、 $0 < x \leq e$ における $f(x)=x\log x$ のグラフは下図のようになる。



よって、 $0 < x \leq e$ における $x\log x$ の値域は $-\frac{1}{e} \leq x\log x \leq e$ となる。したがって、

$-\pi < -\frac{1}{e}, e < \pi$ より、 $0 < x \leq e$ のとき

$$\begin{aligned}\sin(x\log x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x\log x &= 0 \\ \therefore x &= 1\end{aligned}$$

となる。以上より、 $0 < x \leq e$ における $g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1	...	e
$g'(x)$		-	0	+	0	-	-
$g(x)$		$\searrow$	$\cos\left(-\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\cos(e)$

(答) 前表

(v)

$\lim_{x \rightarrow +0} x\log x = 0$ より、 $\lim_{x \rightarrow +0} \cos(x\log x) = 1$ であるから、(iv)より、 $0 < x \leq e$ における $g(x)$ の最大値は $x=1$ のとき、1である。

(答) 1 ($x=1$ のとき)

(vi)

$$\begin{aligned}g\left(\frac{1}{e}\right) &= \cos\left(-\frac{1}{e}\right) \\ g\left(\sqrt{e}\right) &= \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right) \\ g(e) &= \cos(e)\end{aligned}$$

である。ここで、 $3 < \pi < 4, 2.7 < e < 2.8$ より、 $\frac{\pi}{2} < e < \pi, 0 < \frac{1}{2}\sqrt{e} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{e} < 0$ が成り立つから、

$$\cos\left(-\frac{1}{e}\right) > 0, \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right) > 0, \cos(e) < 0$$

となる。また、 $2.7 < e < 2.8$ より、 $\frac{1}{2.8} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2.7}, \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{e} < 1$ であるから、 $\frac{1}{e} < \frac{1}{2}\sqrt{e}$ となる。

これと、 $0 < \frac{1}{2}\sqrt{e} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{e} < 0$ より

$$\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right) < \cos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

となる。以上より $0, g\left(\frac{1}{e}\right), g\left(\sqrt{e}\right), g(e)$ を小さい順に並べると、 $g(e), 0, g\left(\sqrt{e}\right), g\left(\frac{1}{e}\right)$ となる。

(答) $g(e), 0, g\left(\sqrt{e}\right), g\left(\frac{1}{e}\right)$