

2024年度

A 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて黒鉛筆または黒のシャープペンシルで記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、出席票の受験番号が、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認し、出席票の氏名欄に氏名のみを記入してください。なお、出席票は切り離さないでください。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を折り曲げたり、破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 下記の空欄ア～コにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) $1 \leq x \leq 8$ の範囲において、関数 $y = (\log_2 x)^2 - 8 \log_2 x - 20$ は $x =$ ア

のときに最小値 イ をとる。

(ii) 等式

$$\frac{3x^2 - x + 4}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1}$$

が x についての恒等式となるような定数 a, b, c は、 $a =$ ウ , $b =$ エ ,

$c =$ オ である。

(iii) さいころを 3 回投げて出る目をすべてかけた数が 4 の倍数となる確率は カ

である。

(iv) $\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき、 $\frac{1}{\tan \theta} - \tan \theta$ の値は キ である。

(v) 初項と第 2 項がそれぞれ $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ である数列 $\{a_n\}$ は、 $n \geq 2$ のとき等

式

$$a_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を満たす。 $n \geq 3$ のとき、 a_n を n を用いて表すと $a_n =$ ク である。

(vi) $0 \leq x \leq 1$ の範囲において $f(x) \geq 0$ である 2 次関数 $f(x) = ax^2 + b$ は、等式

$$f(x) \left(\int_0^1 f(t) dt \right) = x^2 + 5$$

を満たす。このとき、定数 a, b は、 $a =$ ケ , $b =$ コ である。

Ⅱ. p, q を正の実数とする。座標平面上に放物線 $C: y = -x^2$ がある。 C 上の点 $P(p, -p^2)$ における C の接線を l , 点 $Q(-q, -q^2)$ における C の接線を m とする。また, l と m の交点を R とする。このとき, 次の問 (i) ~ (vi) に答えよ。解答欄には, (i), (ii), (v) については答えのみを, (iii), (iv), (vi) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

- (i) l, m の方程式をそれぞれ p, q を用いて表せ。
- (ii) R の座標を p, q を用いて表せ。
- (iii) Q と l の距離 d を p, q を用いて表せ。
- (iv) 三角形 PQR の面積 S を p, q を用いて表せ。
- (v) l と m が直交するとき, q を p を用いて表せ。
- (vi) l と m が直交するとき, (iv) の S の最小値を求めよ。また, そのときの p の値を求めよ。

Ⅲ. 三角形OABにおいて、 $OA = 5$ 、 $OB = 7$ 、 $AB = 8$ とする。また、 O を中心とする半径 r の円 C が直線AB上の点Dで接している。さらに、 A から C へ引いた接線と C との接点をEとする。ただし、 E はDとは異なる点とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき、次の問(i)～(v)に答えよ。解答欄には、(i)については答えのみを、(ii)～(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(ii) $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OD} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ と表すとき、定数 t の値を求めよ。

(iii) r の値を求めよ。

(iv) D から直線OAへ下ろした垂線をDHとする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(v) $\overrightarrow{OE}$ を $\overrightarrow{OE} = p\vec{a} + q\vec{b}$ と表すとき、定数 p 、 q の値をそれぞれ求めよ。

【以下余白】

