2024年度

# Ca 数　学　問　題

## 注　意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて**黒鉛筆または黒のシャープペンシル**で記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
（万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。）
3. この問題冊子は**12ページ**までとなっています。試験開始後，ただちにページ数を確認してください。なお，問題番号はⅠ～Ⅳとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので，あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し，その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり，傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には，この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

Ⅰ．下記の空欄ア～カにあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(ⅰ) 条件 $a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，$\{a_n\}$ の中で4で割り切れる項のうち3番目の項の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(ⅱ) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)+\log_{\sqrt{2}}x=1$ を満たす実数 $x$ を求めると，$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(ⅲ) 定積分 $\displaystyle\int_{-2}^{1}|e^{2x}-1|\,dx$ の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(ⅳ) 赤玉3個，白玉5個の合計8個の玉が入っている袋がある。この袋から同時に3個の玉を取り出すとき，3個のうち少なくとも1個は赤玉であるという条件の下で，3個中2個が赤玉，1個が白玉である確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ⅴ) 20人の生徒に対して50点満点の試験を行った。試験問題は5問からなり，1問あたりの得点は0点か10点で部分点はない。試験結果は，0点が3人，10点が2人，20点が $a$ 人，30点が $b$ 人，40点が2人，50点が1人であった。ただし，$a$，$b$ は0以上20以下の整数である。得点の中央値が25である場合，得点の平均値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

**II.** 四面体OABCにおいて，3つの線分OA，OB，OCの長さはすべて1であり，$\angle$BOCは直角であるとする。線分ABを $2:1$ に内分する点をD，線分ACを $2:1$ に内分する点をEとして，線分CDと線分BEの交点をFとする。また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。このとき，次の問(i)〜(v)に答えよ。解答欄には，(i)については答えのみを，(ii)〜(v)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) 点Fは線分BEを $t:(1-t)$ に内分しているものとする。ただし $0<t<1$ である。このとき，以下の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に $t$ を用いた数式をそれぞれ記入せよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boxed{\text{ア}}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\text{イ}}\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

(ii) 定数 $x$，$y$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき，(i)の $t$，および $x$，$y$ の値をそれぞれ求めよ。

(iii) 定数 $p$，$q$，$r$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ と表すとき，$p$，$q$，$r$ の値をそれぞれ求めよ。

(iv) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ が平面ABCに垂直であるとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値をそれぞれ求めよ。

(v) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ が平面ABCに垂直であるとき，線分AB，ACの長さをそれぞれ求めよ。

**III.** 正の実数 $x$ の関数 $f(x)$, $g(x)$ を，それぞれ

$$f(x) = x \log x, \quad g(x) = \cos(x \log x)$$

で定める。ただし，$e$ は自然対数の底であり，$2.7 < e < 2.8$ を満たす。また，円周率 $\pi$ が $3 < \pi < 4$ であること，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ であることは用いてもよい。このとき，次の問(i)～(vi)に答えよ。解答欄には，(i)～(iv)については答えのみを，(v)，(vi)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f(x)$ の増減表を書け。

(ii)　$f(x)$ の最小値を求めよ。

(iii)　$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(iv)　$0 < x \leqq e$ における $g(x)$ の増減表を書け。

(v)　$0 < x \leqq e$ における $g(x)$ の最大値を求めよ。

(vi)　4つの実数 $0$，$g\left(\frac{1}{e}\right)$，$g(\sqrt{e})$，$g(e)$ を小さい順に左から並べよ。

Ⅳ. $i$ を虚数単位とする。Oを原点とする複素数平面上の点 $z$ $(z \neq -1)$ に対して，$w = \dfrac{z-1}{z+1}$ で表される点 $w$ がある。このとき，次の問(ⅰ)～(ⅴ)に答えよ。解答欄には，(ⅰ)，(ⅱ)については答えのみを，(ⅲ)～(ⅴ)については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(ⅰ) $z = i$ のとき，$w$ の実部，虚部をそれぞれ求めよ。

(ⅱ) $z$ を $w$ の式で表せ。

(ⅲ) 点 $z$ がOを中心とする半径1の円周上から点 $-1$ を除いた図形上を動くとき，点 $w$ が描く図形を求めよ。

(ⅳ) 点 $z$ がOを中心とする半径2の円周上を動くとき，点 $w$ は中心 $\alpha$，半径 $r$ の円を描く。$\alpha$，$r$ をそれぞれ求めよ。

(ⅴ) 点 $z$ が点1を通り虚軸に平行な直線上を動くとき，点 $w$ の虚部の最大値，最小値，およびそれらを与える $z$ をそれぞれ求めよ。

【以下余白】