

I.

〔解答〕

(i)	ア		
	7		
(ii)	イ		
	$\sqrt{10}$		
(iii)	ウ		
	$\frac{1}{4}, 4$		
(iv)	エ		
	$\frac{2}{3}$		
(v)	オ		
	$-10 \leq a \leq 2$		
(vi)	カ	キ	ク
	1	-1	3

II.

〔解答〕

$$(i) \quad p_1 = \frac{3}{7}, p_2 = \frac{25}{49}$$

(ii)

いま、自然数 m を用いて、 m 回目に記録された数字を a_k とし、 $T_n = \sum_{m=1}^n a_m$ とする。ただし、 a_m は 1 以上 7 以下の自然数である。ここで、

$$\begin{aligned} T_3 &= \sum_{m=1}^3 a_m \\ &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= T_2 + a_3 \end{aligned}$$

が偶数になるのは、 T_2 と a_3 がともに偶数になるときと、 T_2 と a_3 がともに奇数になるときで

ある。(i)より、 T_2 が偶数になる確率は $p_2 = \frac{25}{49}$ 、奇数になる確率は $1 - p_2 = \frac{24}{49}$ であり、 a_3 が偶

数になる確率は $\frac{3}{7}$ 、奇数になる確率は $\frac{4}{7}$ であるから、

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{25}{49} \cdot \frac{3}{7} + \frac{24}{49} \cdot \frac{4}{7} \\ &= \frac{171}{343} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_3 = \frac{171}{343}$$

(iii)

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \sum_{m=1}^{n+1} a_m \\ &= \sum_{m=1}^n a_k + a_{n+1} \\ &= T_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

が偶数になるのは、 T_n と a_{n+1} がともに偶数になるときと、 T_n と a_{n+1} がともに奇数になるとき

である。 T_n が偶数になる確率は p_n であり、 a_{n+1} が偶数になる確率は $\frac{3}{7}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{3}{7} p_n + \frac{4}{7} (1 - p_n) \\ &= -\frac{p_n}{7} + \frac{4}{7} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = -\frac{p_n}{7} + \frac{4}{7}$$

(iv)

(iii)の結果は

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\frac{p_n}{7} + \frac{4}{7} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{7} \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。いま、数列 $\{q_n\}$ を $q_n = p_n - \frac{1}{2}$ により定めると、 $q_{n+1} = -\frac{1}{7} q_n$ 、 $q_1 = p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{14}$

であるから、 $\{q_n\}$ は初項 $-\frac{1}{14}$ 、公比 $-\frac{1}{7}$ の等比数列である。したがって、 $\{q_n\}$ の一般項は

$$q_n = -\frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^{n-1} \text{ となるから、} \{p_n\} \text{ の一般項は}$$

$$\begin{aligned} p_n &= q_n + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^n + \frac{1}{2}$$

(v)

(iv)の結果より、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n p_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{7} \right)^k + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{7} \right)^k + \frac{1}{2} n \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{7} \right)^k &= \left(-\frac{1}{7} \right) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{7} \right)} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \left(-\frac{1}{7} \right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{7} \right)^k + \frac{1}{2} n = \frac{1}{16} \left\{ \left(-\frac{1}{7} \right)^n - 1 \right\} + \frac{n}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{16} \left\{ \left(-\frac{1}{7} \right)^n - 1 \right\} + \frac{n}{2}$$

Ⅲ.

〔解答〕

$$(i) \quad y = x - \sqrt{2} \quad (ii) \quad b = \frac{(a-1)^2}{4} - \sqrt{2}$$

(iii)

直線 $\ell: y = x - \sqrt{2}$ が放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ と点 $P(2\sqrt{2}, f(2\sqrt{2}))$ で接するとき、連立方程式

$$\begin{cases} y = x - \sqrt{2} \\ y = x^2 + ax + b \end{cases}$$

より導かれる x の 2 次方程式 $x^2 + (a-1)x + (b + \sqrt{2}) = 0$ は、 $x = 2\sqrt{2}$ を重解にもつ。よって、

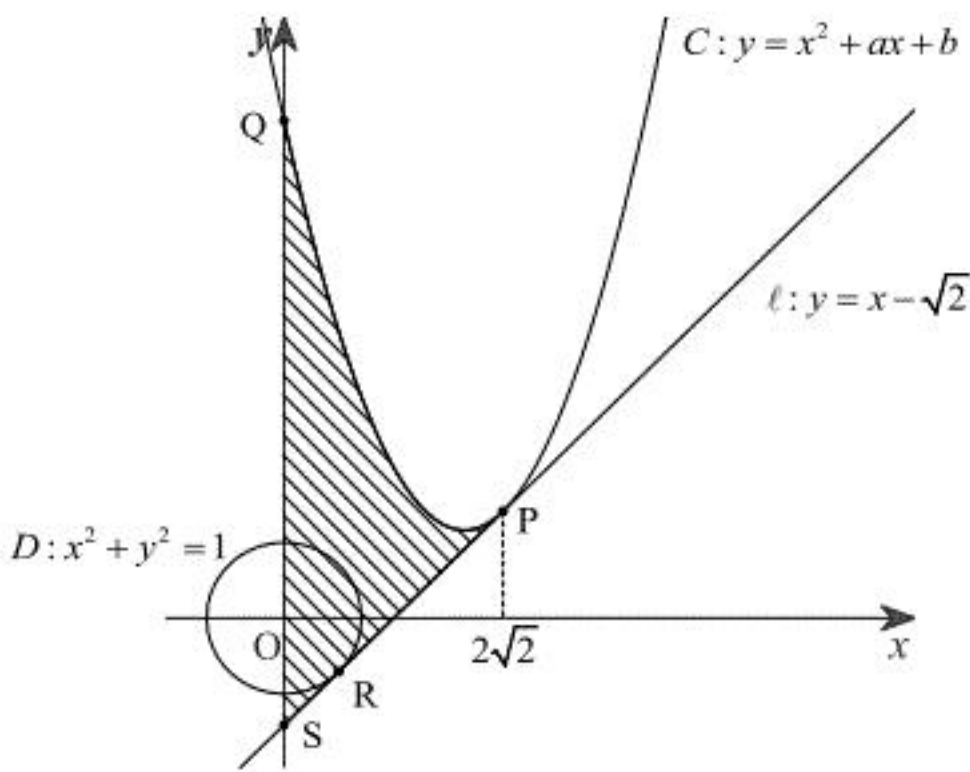
$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}(a-1) + (b + \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{2}(a-1) + \frac{(a-1)^2}{4} &= 0 \left(\because b = \frac{(a-1)^2}{4} - \sqrt{2} \right) \\ \Leftrightarrow (a-1+4\sqrt{2})^2 &= 0 \\ \therefore a &= 1-4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{となり, } b = \frac{(a-1)^2}{4} - \sqrt{2} = \frac{(1-4\sqrt{2}-1)^2}{4} - \sqrt{2} = 8 - \sqrt{2} \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) \quad a = 1-4\sqrt{2}, b = 8-\sqrt{2}$$

(iv)

直線 $\ell: y = x - \sqrt{2}$ が放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ と点 $P(2\sqrt{2}, f(2\sqrt{2}))$ で接するとき、直線 ℓ 、放物線 C 、円 $D: x^2 + y^2 = 1$ 、および 4 点 P, Q, R, S の位置関係は次図のようになる。また、線分 SP 、 C の $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ の部分、線分 QS で囲まれる図形は次図の斜線部となる。ただし、境界を含む。



(iii)より $a = 1-4\sqrt{2}$ 、 $b = 8-\sqrt{2}$ であるから、求める斜線部の面積 X は、

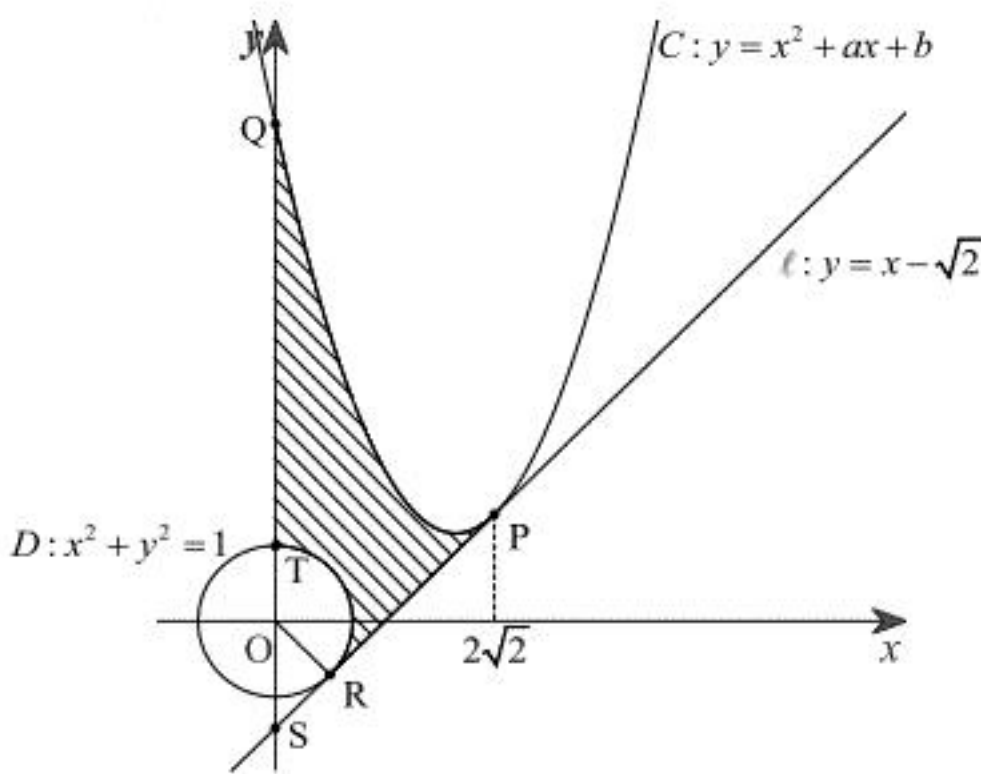
$$\begin{aligned} X &= \int_0^{2\sqrt{2}} \left\{ (x^2 + ax + b) - (x - \sqrt{2}) \right\} dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} (x^2 - 4\sqrt{2}x + 8) dx \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} (x - 2\sqrt{2})^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x - 2\sqrt{2})^3 \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= 0 - \frac{1}{3} (-2\sqrt{2})^3 \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

(v)

直線 $\ell: y = x - \sqrt{2}$ が放物線 $C: y = x^2 + ax + b$ と点 $P(2\sqrt{2}, f(2\sqrt{2}))$ で接するとき、直線 ℓ 、放物線 C 、円 $D: x^2 + y^2 = 1$ 、および 5 点 P, Q, R, S, T の位置関係は次図のようになる。また、線分 RP 、 C の $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ の部分、線分 QT 、 D の弧 TR で囲まれる図形は次図の斜線部となる。ただし、境界を含む。



この斜線部の図形は、(iv)の斜線部の図形から扇形 TOR と $\triangle ORS$ を除いたものであるから、扇形 TOR の面積を Z 、 $\triangle ORS$ の面積を W とすると、

$$Y = X - Z - W$$

となる。ここで、 $T(0, 1)$ 、 $R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ より、 $|\overline{OR}| = 1$ 、 $|\overline{OT}| = 1$ 、 $\overline{OR} \cdot \overline{OT} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \cos \angle TOR &= \frac{\overline{OR} \cdot \overline{OT}}{|\overline{OR}| |\overline{OT}|} \\ \Leftrightarrow \cos \angle TOR &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \angle TOR &= \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < \angle TOR < \pi) \end{aligned}$$

となるから、扇形 TOR の面積 Z は、 $Z = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$ となる。また、点 S は直線

$\ell: y = x - \sqrt{2}$ と y 軸の交点であるから、点 S の座標は $S(0, -\sqrt{2})$ となる。よって、 $\triangle ORS$ の底

辺を $OS = \sqrt{2}$ とすると、高さは点 R の x 座標の絶対値であるから、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。したがって、

$\triangle ORS$ の面積 W は、 $W = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ となる。よって、求める斜線部の面積 Y は、

$$\begin{aligned} Y &= X - (Z + W) \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Y = \frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\pi$$