

I

〔解答〕

(i)	ア		
	$x \leq \frac{2}{5}$		
(ii)	イ		
	$\frac{2}{7}$		
(iii)	ウ	エ	オ
	6	9	$\frac{27}{2}$
(iv)	カ		
	$a \neq -\frac{2}{3}$		
(v)	キ		
	2		
(vi)	ク	ケ	コ
	6	-2	3

II.

〔解答〕

$$(i) \cos \alpha = \frac{p^2}{\sqrt{p^4+1}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{p^4+1}}, \cos \beta = \frac{q^2}{\sqrt{q^4+4}}, \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{q^4+4}}$$

$$(ii) T = \frac{2p^2 - q^2}{p^2q^2 + 2}$$

(iii)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin(\beta - \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2}} \cdot \sqrt{q^2 + \frac{4}{p^2}} (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2}} \cdot \sqrt{q^2 + \frac{4}{p^2}} \left(\frac{2}{\sqrt{q^4+4}} \cdot \frac{p^2}{\sqrt{p^4+1}} - \frac{q^2}{\sqrt{q^4+4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p^4+1}} \right) \\ &= \frac{2p^2 - q^2}{2pq} \end{aligned}$$

である。

$$(答) S = \frac{2p^2 - q^2}{2pq}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} &= \frac{p^2q^2 + 2}{2p^2 - q^2} \cdot \frac{2p^2 - q^2}{2pq} \\ &= \frac{p^2q^2 + 2}{2pq} \\ &= \frac{t^2 + 2}{2t} \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \frac{S}{T} = \frac{t}{2} + \frac{1}{t}$$

(v)

$p > 0, q > 0$ より, $t > 0$ であり, $\frac{t}{2} > 0, \frac{2}{t} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} + \frac{1}{t} &\geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。等号は,

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} &= \frac{1}{t} \\ \Leftrightarrow t^2 &= 2 \\ \therefore t &= \sqrt{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のときに成立するから, $\frac{S}{T}$ の最小値は $\sqrt{2}$ となる。

$$(答) \sqrt{2}$$

Ⅲ.

〔解答〕

(i) $y=kx-k+1$

(ii) $f'(x)=3x^2-2x$

(iii) $x=0$ のとき極大値 1 , $x=\frac{2}{3}$ のとき極小値 $\frac{23}{27}$

(iv)

条件は、方程式 $x^3-x^2+1=kx-k+1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-k)=0$ がちょうど2個の実数解をもつことである。

[1] $k=0$ のとき

方程式は $x^2(x-1)=0$ となり、 $x=0, 1$ のちょうど2個の実数解を持つ。

[2] $k=1$ のとき

方程式は $(x-1)^2(x+1)=0$ となるから、 $x=-1, 1$ のちょうど2個の実数解を持つ。

[3] $k<0$ のとき

$x^2-k=0$ は実数解を持たないから、 $(x-1)(x^2-k)=0$ はちょうど1個の実数解を持つ。

[4] $0<k<1, 1<k$ のとき

$(x-1)(x^2-k)=0$ はちょうど3個の実数解を持つ。

以上, [1]-[4]より、 $(x-1)(x^2-k)=0$ は $k=0, 1$ のとき、ちょうど2個の実数解を持つ。

(答) $k=0, 1$

(v)

(iv)での議論より、 $(x-1)(x^2-k)=0$ は $0<k<1, 1<k$ のとき、ちょうど3個の実数解を持つ。

(答) $0<k<1, 1<k$

(vi)

異なる3個の共有点は $y=kx-k+1$ 上にあるから、

$$\begin{aligned}(y_2-y_1):(y_3-y_2) &= 1:2 \\ \Leftrightarrow k(x_2-x_1):k(x_3-x_2) &= 1:2 \\ \Leftrightarrow x_2-x_1:x_3-x_2 &= 1:2 \\ \Leftrightarrow 2x_1-3x_2+x_3 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。異なる3個の共有点の x 座標は、 $x=1, \pm\sqrt{k}$ であるから、 k の値で場合分けを行う。

[1] $0<k<1$ のとき

$x_1=-\sqrt{k}, x_2=\sqrt{k}, x_3=1$ である。これを①に代入すると

$$\begin{aligned}2(-\sqrt{k})-3\sqrt{k}+1 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{25}\end{aligned}$$

となり、 $0<k<1$ を満たす。

[2] $k>1$ のとき

$x_1=-\sqrt{k}, x_2=1, x_3=\sqrt{k}$ である。このとき、

$$\begin{aligned}2(-\sqrt{k})-3\cdot 1+\sqrt{k} &= 0 \\ \therefore \sqrt{k} &= -3\end{aligned}$$

となるが、 $k>1$ でこの式を満たす k は存在しない。

以上, [1], [2]より、 $k=\frac{1}{25}$ である。

(答) $k=\frac{1}{25}$