

I.

〔解答〕

(i)	ア		
	8		
(ii)	イ	ウ	
	3	58	
(iii)	エ		
	$-\frac{1}{12}$		
(iv)	オ	カ	キ
	$\frac{3}{44}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{29}{44}$
(v)	ク	ケ	
	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$	

II.

〔解答〕

$$(i) \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \quad (ii) \quad f(x) = -\frac{1}{2}t^3 + 2t^2 + \frac{3}{2}t - 2$$

(iii)

$$\begin{aligned} t &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

であり、 x はすべての実数を動くため、

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

の値を取り得る。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

(iv)

$f(x)$ の最大値と最小値は、 t の関数 $-\frac{1}{2}t^3 + 2t^2 + \frac{3}{2}t - 2$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) の最大値と最小値と一

致するためそれを考える。 $y = -\frac{1}{2}t^3 + 2t^2 + \frac{3}{2}t - 2$ において、 t で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{3}{2}t^2 + 4t + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(3t+1)(t-3) \end{aligned}$$

となる。よって $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ における y の増減は下表のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$	$\searrow$	$-\frac{61}{27}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

これより、 y すなわち $f(x)$ の最大値は $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$ であり、最小値は $-\frac{61}{27}$ である。

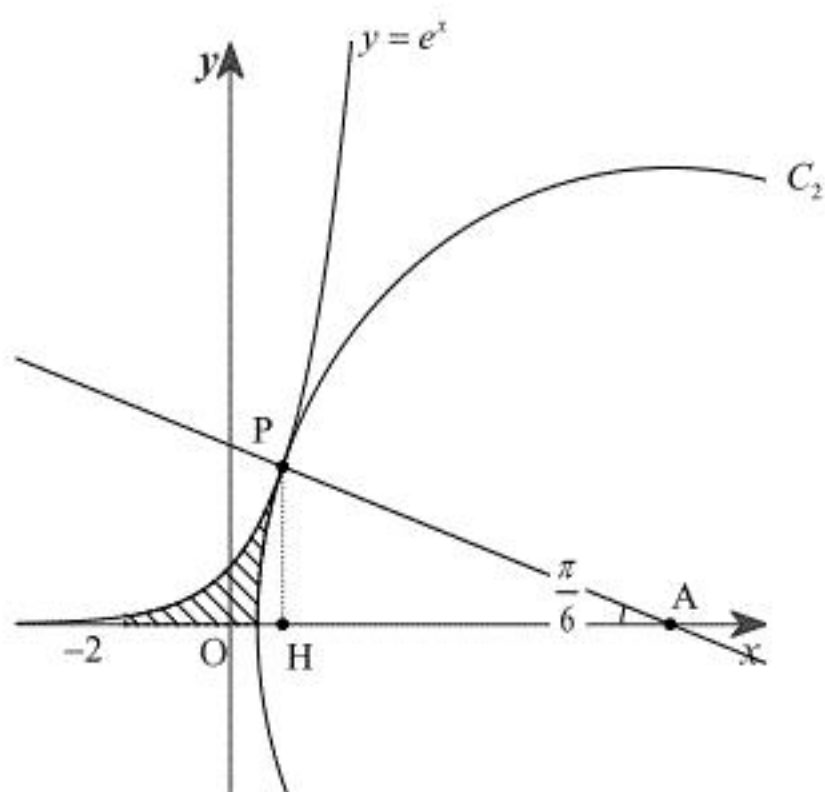
$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{\sqrt{2}}{2} + 2, \text{ 最小値: } -\frac{61}{27}$$

Ⅲ.

〔解答〕

$$(i) \quad y = -\frac{1}{e^p}x + \frac{p}{e^p} + e^p \quad (ii) \quad a = p + e^{2p} \quad (iii) \quad r = e^p \sqrt{e^{2p} + 1}$$

(iv)



点Pから x 軸に下ろした垂線の足をHとして、直角三角形PHAに注目する。 $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$ のとき、

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{PH}{HA} = \frac{e^p}{e^{2p}} = \frac{1}{e^p}$$

が成立し、 p は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{1}{e^p} \\ \Leftrightarrow e^p &= \sqrt{3} \\ \therefore p &= \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{2} \log 3$$

(v)

与えられた不等式の表す領域は上図の斜線部である。面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^p e^x dx - \left(\pi r^2 \times \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} - \frac{1}{2} \times AH \times HP \right) \\ &= [e^x]_{-2}^p - \left(\frac{\pi}{12} r^2 - \frac{1}{2} \times e^{2p} \times e^p \right) \\ &= (e^p - e^{-2}) - \frac{\pi}{12} (e^{4p} + e^{2p}) + \frac{1}{2} e^{3p} \\ &= \sqrt{3} - e^{-2} - \frac{\pi}{12} (9 + 3) + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} - e^{-2} - \pi \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{5\sqrt{3}}{2} - e^{-2} - \pi$$

IV.

(i)

$$n^3 - n = (n-1)n(n+1)$$

であり、右辺は連続する3整数の積であるため、2の倍数かつ3の倍数である。ゆえに6の倍数である。

(証明終)

(ii)

$$\begin{aligned} n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n &= n\{n^2(n+2) - (n+2)\} \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

であり、右辺は連続する3整数の積を含み、3の倍数である。また、 $(n-1)n$ と $(n+1)(n+2)$ のはともに連続する2整数の積であるから、2の倍数である。さらにどちらか一方は4の倍数となる。つまり、右辺は2の倍数と4の倍数の積であり8の倍数である。ゆえに右辺は3の倍数かつ8の倍数であるため、24の倍数である。

(証明終)

(iii)

$n^5 + 4n$ が5の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明する。

[I] $n=2$ のとき

$$n^5 + 4n = 2^5 + 4 \cdot 2 = 40$$

であり、確かに5の倍数である。

[II] $n=k$ (k は2以上の自然数) のとき

$k^5 + 4k$ が5の倍数、つまり $k^5 + 4k = 5m$ なる整数 m が存在することを仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (k+1)^5 + 4(k+1) &= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 9k + 5 \\ &= k^5 + 4k + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1) \\ &= 5(m + k^4 + 2k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ としたものの5の倍数である。

以上、[I], [II]により、任意の2以上の自然数 n に対して $n^5 + 4n$ は5の倍数である。

(証明終)

(iv)

$$\begin{aligned} n^9 + 2n^8 - n^7 - 2n^6 + 4n^5 + 8n^4 - 4n^3 - 8n^2 &= n^2(n^7 + 2n^6 - n^5 - 2n^4 + 4n^3 + 8n^2 - 4n - 8) \\ &= n^2\{n^4(n^3 + 2n^2 - n - 2) + 4(n^3 + 2n^2 - n - 2)\} \\ &= n^2(n^4 + 4)(n^3 + 2n^2 - n - 2) \\ &= (n^5 + 4n)(n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n) \end{aligned}$$

と式変形できる。(ii)と(iii)より、右辺は5の倍数かつ24の倍数であるため、120の倍数である。

(証明終)