

C b 数 学 問 題

注 意

1. 試験開始の指示があるまでこの問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答用紙はすべて黒鉛筆または黒のシャープペンシルで記入することになっています。黒鉛筆・消しゴムを忘れた人は監督に申し出てください。
(万年筆・ボールペン・サインペンなどを使用してはいけません。)
3. この問題冊子は8ページまでとなっています。試験開始後、ただちにページ数を確認してください。なお、問題番号はⅠ～Ⅲとなっています。
4. 解答用紙にはすでに受験番号が記入されていますので、あなたの受験票の番号であるかどうかを確認してください。あなたの氏名を記入する必要はありません。
5. 解答は解答用紙の指定された解答欄に記入し、その他の部分には何も書いてはいけません。
6. 解答用紙を破ったり、傷つけたりしないように注意してください。
7. 計算には、この問題冊子の余白部分を使ってください。
8. この問題冊子は持ち帰ってください。

I . 次の空欄ア～ケにあてはまる数を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(i) 自然数 n に対して $a_n = 2^n$ とし、積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を A_n とおく。このとき $A_n \geq 10^{10}$ を満たす最小の n は ア である。ただし、 $\log_2 10 = 3.3219$ とする。

(ii) 2つの平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は、 $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 、 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$ を満たすとする。このとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は イ である。また、 $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 + |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$ の値は ウ である。

(iii) 定積分 $\int_0^{\frac{7\pi}{6}} \sin x \sin 2x \, dx$ の値は エ である。

(iv) 箱の中に緑色のカードが5枚、黄色のカードが4枚、赤色のカードが3枚入っている。箱から無作為にカードを3枚取り出すとき、3枚とも同じ色である確率は オ、3枚の色がすべて異なる確率は カ、2枚が同じ色であり、かつ、残りの1枚が他の2枚と異なる色である確率は キ である。

(v) i を虚数単位とする。実数 a, b が等式

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)^9 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{11} = a + bi$$

を満たすとき、 $a =$ ク、 $b =$ ケ である。

Ⅱ．実数 x に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x + 4 \sin x \cos x$$

により定める。また、 $t = \sin x + \cos x$ とおく。次の問 (i)～(iv) に答えよ。解答欄には、(i)、(ii) については答えのみを、(iii)、(iv) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) $\sin x \cos x$ を t を用いて表せ。

(ii) $f(x)$ を t を用いて表せ。

(iii) x がすべての実数を動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(iv) x がすべての実数を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

Ⅲ. a, p を正の実数とする。座標平面上の曲線 $C_1: y = e^x$ と C_1 上の点 $P(p, e^p)$ がある。P における C_1 の法線を ℓ , ℓ と x 軸の交点を $A(a, 0)$, A を中心とする半径 r の円を C_2 とする。P が C_1 と C_2 のただ一つの共有点であるとき、次の問 (i) ~ (v) に答えよ。解答欄には、(i) ~ (iii) については答えのみを、(iv), (v) については答えだけでなく途中経過も書くこと。

(i) ℓ の方程式を p を用いて表せ。

(ii) a を p を用いて表せ。

(iii) r を p を用いて表せ。

(iv) $\angle OAP = \frac{\pi}{6}$ のとき、 p の値を求めよ。

(v) p を (iv) で求めた値とすると、次の不等式の表す領域 D の面積 S を求めよ。

$$-2 \leq x \leq p, \quad y \geq 0, \quad y \leq e^x, \quad (x - a)^2 + y^2 \geq r^2.$$

【以下余白】

