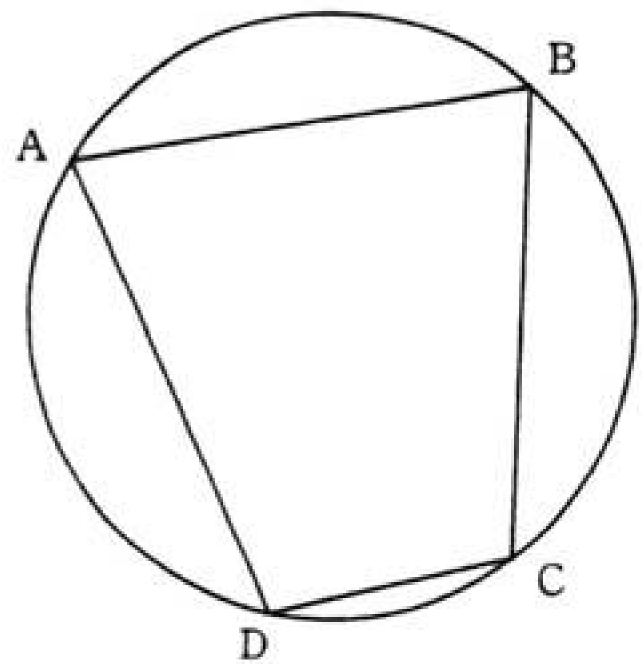
I　半径1の円に内接する四辺形ABCDの面積が最大になるのは，ABCDが正方形のときであることを証明せよ（解答欄 $\boxed{\text{ア}}$ に証明を書け）。そのときの正方形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。ABCDが長方形で角ABDが $\dfrac{\pi}{8}$ であるときには，長方形ABCDの面積は $\boxed{\text{ウ}}$ で辺ADの長さは $\boxed{\text{エ}}$ である。角ABDが $\dfrac{\pi}{16}$ であるとき，長方形ABCDの面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。



II　$a>0$，$b>0$ とする。$\mathrm{P}=(x_0,\ y_0)$ を双曲線

$$\mathrm{C}:\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

上の動点とする（ただし $x_0>0$，$y_0>0$）。Pにおける双曲線Cの接線を l とし，l と x 軸，y 軸との交点を $\mathrm{Q}=(q,\ 0)$，$\mathrm{R}=(0,\ r)$ とする。またPを通り l と直交する直線を m とし，m と x 軸，y 軸との交点を $\mathrm{S}=(s,\ 0)$，$\mathrm{T}=(0,\ t)$ とする。このとき，q，s は a，b，x_0 を用いて

$$q=\boxed{\text{カ}}，\quad s=\boxed{\text{キ}}$$

と表され，r，t は a，b，y_0 を用いて

$$r=\boxed{\text{ク}}，\quad t=\boxed{\text{ケ}}$$

と表される。

線分QRの長さと線分STの長さの積を u とする。$\mathrm{P}=(x_0,\ y_0)$ が双曲線C上を

$x_0>0$，$y_0>0$ の範囲を動くとき，u のとりうる範囲を求めると，

$a \leqq b$ のときは，　$u >$ $\boxed{\text{コ}}$

である。また

$a > b$ のときは，$u \geqq$ $\boxed{\text{サ}}$

で等号は，$x_0=$ $\boxed{\text{シ}}$ ，$y_0=$ $\boxed{\text{ス}}$ のとき成り立つ。

III　2×2行列の間に等号

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

が成り立っている（ただし，$\mathrm{A}>0$，$0<\theta$，$\varphi<\pi$）。このとき，まず $\mathrm{AC} =$ $\boxed{\text{セ}}$

がわかり，また C は a，θ によって $\mathrm{C} =$ $\boxed{\text{ソ}}$ と表される。

a を固定して，θ を開区間 $0<\theta<\pi$ 上を動かすとき，$\cot\varphi$ は $\cot\theta$ の関数となる。

$\cot\varphi = f(\cot\theta)$ とすると

$f(x) =$ $\boxed{\text{タ}}$

である。とくに φ も θ の関数となる。これらのことから

$\mathrm{C}^2 \dfrac{d\varphi}{d\theta} =$ $\boxed{\text{チ}}$

が示せる。また BC も $\cot\theta$ の関数として　$\mathrm{BC} =$ $\boxed{\text{ツ}}$ と表される。

IV 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の関係式が成り立っている。

$$f(x) = x^3e^{-x} + x^3\int_0^1 te^{-t^2}\,dt + \frac{1}{2}x^2\int_0^1 f'(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

この関係式より $f(x)$ を以下のようにして求めよう。

$$\int_0^1 te^{-t^2}\,dt = \boxed{\quad テ \quad}$$ となり，$$\int_0^1 f'(t)\,dt = \boxed{\quad ト \quad}$$

となる。これを用いて

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \boxed{\quad ナ \quad}$$

となる。これより $f(x) = \boxed{\quad ニ \quad}$ である。