

数 学 問 題

(理 工 必 須)

(全 2 ページ)

指 示 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題文の に適当なものを書きなさい。
3. 解答はすべて別紙の解答用紙に記入しなさい。
4. 解答用紙・下書用紙はこの冊子の中に折り込んであります。
5. 試験終了後、問題冊子・下書用紙は持ち帰りなさい。

数 学

I 原点を $O(0, 0)$ とする xy 平面において、点 $P(x, y)$ の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

による像を $P'(x', y')$ とおく。点 P が原点を中心とし、半径 1 の円周上を動くとき、 $\overline{OP'}$ の最小値は ア 、最大値は イ である。また、 $\overline{OP'}$ が最小になるときの P を P_1 、最大になるときの P を P_2 とすると、 P_1 の座標は ウ 、 P_2 の座標は エ である。また、 $\angle P_1OP_2 =$ オ である。
(一般に、線分 AB の長さを $\overline{AB}$ とかく。)

II 原点 O と点 $A(0, 0, 1)$ を直径の両端とする球面を S とする。 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ (ただし、 $P \neq O$ とする) と A を結ぶ直線と S との交点のうち A と異なる点を Q とする。 O, Q を通る直線と平面 $\pi: z=1$ との交点を $R(X, Y, 1)$ とする。

[1] 次の量を x, y を用いて表せ。

$$\overline{OP} \cdot \overline{AR} = \text{ カ }, X = \text{ キ }, Y = \text{ ク }.$$

[2] $M = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ とおく。

変換 $f: (x, y) \rightarrow (X, Y)$ が次の性質を持つかどうか調べて、成り立つ性質の記号をすべて解答欄 ケ に記せ。

(a) 1 次変換である。

(b) M から M への写像として、1 対 1 の写像である。

(c) M から M への写像として、上への写像である。

[3] $(\xi, \eta) = (f \circ f)(x, y)$ とおくと、 ξ と η は x, y を使って

$$\xi = \text{ コ }, \eta = \text{ サ } \text{ と表すことができる。}$$

Ⅲ $a > 0$ とする。曲線： $y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、 P における接線に直交する直線の方程式は

$$y = \boxed{\text{シ}}$$

である。この直線と、曲線： $y = x^2$ とによって囲まれた部分の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \boxed{\text{ス}}$$

となる。また、この直線が曲線： $y = x^2$ によって切り取られる線分の長さ $l(a)$ は

$$l(a) = \boxed{\text{セ}}$$

となる。 $S(a)$ は

$$a = \boxed{\text{ソ}} \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{タ}}$$

をとり、 $l(a)$ は

$$a = \boxed{\text{チ}} \text{ のとき最小値 } \boxed{\text{ツ}}$$

をとる。

Ⅳ 関数 $f(x)$ は微分可能で

$$\int_0^x (t - t^2) f(x - t) dt = x^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしているという。 $u = x - t$ とおくと、①式は

$$\begin{aligned} (\boxed{\text{テ}}) \int_0^x f(u) du + (\boxed{\text{ト}}) \int_0^x u f(u) du \\ + (\boxed{\text{ナ}}) \int_0^x u^2 f(u) du = x^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。次に、②式の両辺を x で2回微分することにより、

$$(\boxed{\text{ニ}}) \int_0^x f(u) du + (\boxed{\text{ヌ}}) f(x) = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

を得る。これより、 $f(0) = \boxed{\text{ネ}}$ となり、

さらに③式の両辺を x で微分した結果とあわせて $f(x) = \boxed{\text{ノ}}$ を得る。